UNIVERSITATEA **TITU MAIORESCU**
Facultatea de INFORMATICĂ

Conf. univ. dr.
VALENTIN GÂRBAN

ANALIZĂ MATEMATICĂ

Curs pentru învățământul la distanță



editura universității Titu Maiorescu

BUCUREȘTI – 2010

UNIVERSITATEA Titu MAIORESCU BUCUREŞTI
Facultatea de Informatică
Învățământ la Distanță

ANALIZĂ MATEMATICĂ

Analiza matematică este una din disciplinele de bază care, pentru profilul INFORMATICĂ, este impusă de către Agenția Națională pentru Asigurarea Calității în Învățământul Superior (ARACIS) ca esențială pentru pregătirea studenților şi pentru depăşirea procedurilor de evaluare şi acreditare. Modul de prezentare a acestui material are în vedere particularitățile învățământului la distanță, la care studiul individual este determinant. Pentru orice nelămuriri față de acest material vă rugăm să contactați tutorele de disciplină care are datoria să vă ajute oferindu-vă toate explicațiile necesare.

Disciplina de Analiză matematică îşi propune următoarele obiective specifice:

- Însuşirea noțiunilor fundamentale şi a algoritmilor specifici de rezolvare a problemelor privind şiruri şi serii numerice şi de funcții, limită, continuitate, calcul diferențial (una sau mai multe variabile), calcul integral;
- Formarea şi dezvoltarea bazei matematice a studenților pentru disciplinele fundamentale şi de specialitate din anii superiori;
- Formarea şi dezvoltarea aptitudinilor şi deprinderilor de analiză logică, formulare corectă şi argumentare fundamentată, în rezolvarea problemelor tehnico-economice şi de specialitate;
- Identificarea corectă a tuturor dimensiunilor unei probleme matematice precum şi a procedurilor ce pot fi utilizate pentru rezolvarea acesteia;
- O comparație critică a metodelor de rezolvare evidențiind, eventual, calea optimă de soluționare.

Vă precizăm de asemenea că, din punct de vedere al verificărilor şi al notării, cu adevărat importantă este capacitatea pe care trebuie să o dobândiți şi să o probați de a rezolva toată tipologia de probleme aplicative aferente materialului teoretic prezentat în continuare. De aceea vă recomandăm să parcurgeți cu atenție toate problemele rezolvate, să rezolvați problemele propuse prin testele de autoevaluare si temele de control; fiți convinşi că examenul final apelează la tipurile de probleme prezente în secțiunile menționate anterior.

SUCCES!

Coordonator disciplină: Conf. univ. dr. Valentin Gârban
Tutori: Asist. univ. drd. Zanfir Veronica

MODULUL 1

ŞIRURI ŞI SERII DE NUMERE

În acest modul sunt prezentate, pe parcursul a două lecţii, principalele noţiuni cu caracter teoretic referitoare la şirurile şi seriile de numere reale $(\mathbb{R},\mathbb{R}^k)$ şi de numere complexe $(\mathbb{C},\mathbb{C}^k)$ şi algoritmii specifici de rezolvare a problemelor care se referă la şiruri şi serii de numere:

- noţiunile de convergenţă şi limită a unui şir de numere (reale sau complexe) şi de convergenţă şi sumă a unei serii de numere;
- criterii de convergenţă pentru şiruri şi serii de numere (reale, complexe din $\mathbb{R}^k$);
- algoritmi pentru calculul limitelor de şiruri, în corelaţie cu criteriile de convergenţă studiate;
- metode de calcul pentru determinarea sumei a numeroase clase de serii numerice convergente.

Organizarea materialului este următoarea:

- la începutul fiecărei lecţii sunt prezentate pe scurt principalele rezultate teoretice, formule şi algoritmi de rezolvare pentru problemele specifice temei studiate;
- urmează un număr semnificativ de probleme rezolvate, care acoperă întreaga gamă a noţiunilor teoretice şi algoritmilor de rezolvare prezentaţi anterior;
- în finalul fiecărei lecţii este propus un test de autoevaluare şi la sfârşitul modulului o temă de control, problemele propuse fiind variate şi ordonate după gradul lor de dificultate şi acoperind întreaga tematică studiată în modulul respectiv.

Materialul trebuie parcurs în ordinea sa firească prezentată în cuprinsul modulului, inclusiv în porţiunea referitoare la aplicaţii. Metoda de studiu va fi cea specifică disciplinelor matematice, cu utilizarea expresă a adnotărilor făcute cu creionul pe tot parcursul textului. Se recomandă întocmirea unui caiet de probleme. Pentru fiecare tip de exerciţiu se recomandă identificarea algoritmului şi descompunerea acestuia în etape succesive. Se recomandă studierea soluţiilor problemelor rezolvate şi rezolvarea completă a problemelor propuse în testele de autoevaluare şi în tema de control propusă.

Timpul mediu necesar parcurgerii şi însuşirii noţiunilor teoretice, algoritmilor practici de rezolvare a problemelor, formării deprinderilor practice de rezolvare şi dobândirii competenţelor anunţate este de aproximativ 6-8 ore de studiu pentru fiecare lecţie, într-un ritm de 2-3 ore zilnic.

LECȚIA 1

1.1 Şiruri de numere reale. Puncte limită. Convergență

Definiția 1.1.1. Fie şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de numere reale. Un număr real a se numeşte ***punct limită*** al şirului considerat, dacă în orice vecinătate a sa se află o infinitate de termeni ai şirului.

Notându-se cu L mulțimea punctelor limită pentru şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, marginea superioară a mulțimii L se va numi ***limita superioară*** a şirului, iar marginea inferioară a mulțimii L se va numi ***limita inferioară*** a şirului considerat.

Se va scrie: $\sup(L)=\limsup\limits_{n\to\infty}(x_n)$ şi $\inf(L)=\liminf\limits_{n\to\infty}(x_n)$.

Exemple

1) Şirul cu termenul general $x_n=\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$, $n\in\mathbb{N}$, are ca puncte limită pe $-1,\ -\frac{\sqrt{2}}{2},\ 0,\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ 1$.

2) Şirul cu termenul general $x_n=\frac{1}{n}$, $n\in\mathbb{N}^*$, va avea $L=\{0\}$, deci $\limsup\limits_{n\to\infty}(x_n)=\liminf\limits_{n\to\infty}(x_n)=0$, şirul fiind convergent.

Definiția 1.1.2. Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se numeşte ***convergent***, dacă există un număr x, astfel încât pentru $(\forall)\ \varepsilon>0$, $(\exists)\ n(\varepsilon)\in\mathbb{N}$, astfel încât pentru $(\forall)\ n\geq n(\varepsilon)$ să se verifice $|x_n-x|<\varepsilon$.

Numărul real x cu proprietatea de mai sus se numeşte ***limita şirului*** $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi se va scrie $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n)=x$.

Dacă un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent, limitele sale superioară şi inferioară sunt egale.

Definiția 1.1.3. Un şir care are limita infinită sau un şir pentru care cele două limite, inferioară şi superioară, sunt diferite se numeşte ***şir divergent***.

Teorema lui Weierstrass. Orice şir monoton şi mărginit este convergent.

Teorema Töplitz. Fie o matrice infinită de numere reale $A=\left(a_{mn}\right)_{(m,n)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$ cu proprietatea că există $M\in\mathbb{R}_+^*$, astfel încât:

$$|a_{k1}|+|a_{k2}|+\ldots+|a_{km}|+\ldots\le M,\ (\forall)\ k\in\mathbb{N}^*.$$

Următoarele afirmații sunt echivalente:

1) pentru orice şir convergent de numere reale $(x_n)_n$ şirul $(y_n)_n$ definit prin $y_n=\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}\cdot x_k$ este convergent şi $\lim_{n\to\infty}y_n=\lim_{n\to\infty}x_n$;

2) **(i)** $\lim_{n\to\infty}a_{nm}=0,\ (\forall)\ m\in\mathbb{N}^*$;

(ii) $\lim_{n\to\infty}\left(a_{n1}+a_{n2}+\ldots+a_{nm}+\ldots\right)=1$.

Consecința 1. Dacă în Teorema Töplitz se modifică punctul 2) (ii) în $(\exists)\ \lim_{n\to\infty}\sum_{m\ge1}a_{nm}=\ell<\infty$, atunci afirmația 1) devine $(\exists)\ \lim_{n\to\infty}y_n=\ell\cdot\lim_{n\to\infty}x_n$.

Teorema Cesaro-Stolz. Fie şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oarecare şi $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton crescător de numere pozitive, cu $\lim_{n\to\infty}b_n=\infty$. Atunci, dacă există $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=\ell$, va exista şi $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$ şi cele două limite vor avea aceeaşi valoare.

Indicație de rezolvare:

Se aplică Teorema Töplitz şirului $(x_n)_n$, $x_n=\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}$, iar şirul dublu

$$\left(A_{nm}\right)_{n,m\in\mathbb{N}},\ A_{nk}=\frac{b_k-b_{k-1}}{b_n},\ k\le n\ \text{ şi }\ A_{nk}=0,\ k>n.$$

În aceste condiții $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b_1-b_0}{b_n}\cdot x_1+\ldots+\frac{b_n-b_{n-1}}{b_n}\cdot x_n\right)=\lim_{n\to\infty}x_n=\ell$.

De asemenea, $\frac{b_1-b_0}{b_n}\cdot x_1+\ldots+\frac{b_n-b_{n-1}}{b_n}\cdot x_n=\frac{a_n}{b_n},\ (\forall)\ n\in\mathbb{N}^*$.

Consecința 2. Dacă $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ sunt două şiruri de numere reale cu proprietățile:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} b_k = \infty,\ b_n \in \mathbb{R}_+^*,\ (\forall)\ n\in\mathbb{N}$;

2) $(\exists)\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Atunci $(\exists)\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1\cdot b_1+...+a_n\cdot b_n}{b_1+...+b_n} = a$.

Criteriul radicalului

Dacă şirul $(a_n)_n$ este convergent şi are termenii pozitivi, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot...\cdot a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Indicaţie de rezolvare:

Se aplică teorema Cesaro-Stolz pentru şirurile $(\lg a_n)_n$ şi $b_n = n$. Atunci

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lg a_1+\lg a_2+...+\lg a_n}{n} = \lim_{n\to\infty}\lg a_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\lg\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot...\cdot a_n} = \lim_{n\to\infty}\lg a_n,$$

de unde rezultă $\lg\left(\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot...\cdot a_n}\right) = \lg\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)$ şi de aici cerinţa problemei.

Criteriul raportului

Dacă şirul $(a_n)_n$ are termenii pozitivi, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$, dacă ultima limită există.

Criteriul majorării

Dacă $|a_n - a| \le b_n$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

O reciprocă a teoremei Cesaro-Stolz

Dacă $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ sunt două şiruri de numere reale cu proprietăţile:

1) $b_n \in \mathbb{R}^*,\ b_n \ne b_{n+1},\ (\forall)\ n\in\mathbb{N}$;

2) $(\exists)\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \ell \in \mathbb{R}$;

3) $(\exists)\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{b_{n+1}} = b \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Atunci $(\exists)\ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \ell$.

Criteriul general de convergență al lui Cauchy. Condiția necesară și suficientă ca un șir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ să fie convergent este ca pentru $(\forall)\ \varepsilon > 0$, $(\exists)\ n(\varepsilon)\in\mathbb{N}$, astfel încât pentru $(\forall)\ n \geq n(\varepsilon)$ și pentru $(\forall)\ p\in\mathbb{N}^*$ să se verifice $\left|x_{n+p} - x_n\right| < \varepsilon$.

1.2 Șiruri recurente

Definiția 1.2.1. Un șir $(x_n)_n$ se numește ***șir recurent*** dacă este definit de o relație de forma $x_n = f\left(x_{n-1},\ x_{n-2},\ldots,x_{n-k}\right),\ n > k$ cu $x_1,\ x_2,\ldots,\ x_k$ cunoscuți. Numărul natural k se numește ***ordinul relației de recurență***.

Recurență de ordinul 1

$x_{n+1} = a\cdot x_n + b,\ n\geq 0,\ x_0\in\mathbb{R}$.

Cazul 1. $a\neq 0,\ b=0 \Rightarrow x_{n+1} = a\cdot x_n \Rightarrow x_n = a^n\cdot x_0,\ (\forall)\ n\in\mathbb{N}$.

Cazul 2. $a=1,\ b\neq 0 \Rightarrow x_{n+1} = x_n + b \Rightarrow x_n = n\cdot b + x_0,\ (\forall)\ n\in\mathbb{N}$.

Cazul 3. $b\neq 0,\ a\notin\{0,1\} \Rightarrow x_{n+1} = a\cdot x_n + b,\ (\forall)\ n\in\mathbb{N}$.

Se caută un șir cu termenul general de forma $y_n = x_n + \alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}$.

$y_{n+1} - \alpha = a\cdot(y_n - \alpha) + b \Rightarrow y_{n+1} = a\cdot y_n + \alpha\cdot(1-a) + b$. Impunem condiția $\alpha\cdot(1-a)+b=0$ și rezultă $y_{n+1} = a\cdot y_n \Rightarrow y_n = a^n\cdot y_0$ și deci

$$x_n = a^n\cdot\left(x_0 + \frac{b}{a-1}\right) + \frac{b}{a-1},\ (\forall)\ n\in\mathbb{N}.$$

Recurență de ordinul 2

$$a\cdot x_{n+1} + b\cdot x_n + c\cdot x_{n-1} = d,\ n\geq 1,\ a,\ b,\ c,\ d\in\mathbb{R}.$$

Observație. Printr-o translație a șirului $(x_n)_n$ se poate obține o recurență de forma $a\cdot x_{n+1} + b\cdot x_n + c\cdot x_{n-1} = 0,\ n\geq 1,\ a,\ b,\ c\in\mathbb{R}$.

Pentru această problemă se caută soluții de forma $x_n = r^n,\ r\neq 0$. Înlocuind aceasta în relația de recurență, vom obține ecuația $a\cdot r^2 + b\cdot r + c = 0$ numită ecuația caracteristică asociată recurenței.

Se disting trei cazuri:

Cazul I: Dacă $\Delta > 0$, ecuația caracteristică are două rădăcini reale şi distincte r_1, r_2.

Lema 1. Şirurile cu termenii generali $y_n = r_1^n$, $z_n = r_2^n$, $n \in \mathbb{N}$, sunt soluții ale relației de recurență.

Lema 2. Orice combinație liniară a şirurilor $y_n = r_1^n$, $z_n = r_2^n$, $n \in \mathbb{N}$, este soluție a relației de recurență.

Lema 3. Soluția generală $(x_n)_n$ a relației de recurență şi şirurile $(y_n)_n$, $(z_n)_n$ sunt liniar dependente.

Prin urmare, soluția generală a relației de recurență este:

$$x_n = A \cdot r_1^n + B \cdot r_2^n,\ n \in \mathbb{N},\ A,\ B \in \mathbb{R}.$$

Cazul II: Dacă $\Delta = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = r$.

Lema 1. Şirurile cu termenii generali $y_n = r^n$, $z_n = n \cdot r^n$ sunt soluții ale relației de recurență.

Lema 2. Orice combinație liniară a şirurilor $(y_n)_n$, $(z_n)_n$ este soluție a relației de recurență.

Lema 3. Soluția generală $(x_n)_n$ a relației de recurență şi şirurile $(y_n)_n$, $(z_n)_n$ sunt liniar dependente.

Prin urmare, soluția generală a relației de recurență este:

$$x_n = (A + B \cdot n) r^n,\ n \in \mathbb{N},\ A,\ B \in \mathbb{R}.$$

Cazul III: Dacă $\Delta < 0 \Rightarrow r_1 = \rho \cdot (\cos\theta + i \cdot \sin\theta)$, $r_2 = \rho \cdot (\cos\theta - i \cdot \sin\theta)$.

Lema 1. Şirurile cu termenii generali $y_n = \rho^n \cdot \cos n\theta$ şi $z_n = \rho^n \cdot \sin n\theta$ sunt soluții ale relației de recurență.

Lema 2. Orice combinație liniară a şirurilor $(y_n)_n$, $(z_n)_n$ este soluție a relației de recurență.

Lema 3. Soluția generală $(x_n)_n$ a relației de recurență şi şirurile $(y_n)_n$, $(z_n)_n$ sunt liniar dependente.

Prin urmare, soluția generală a relației de recurență este:

$$x_n = \rho^n \cdot (A \cos n\theta + B \sin n\theta),\ n \in \mathbb{N},\ A,\ B \in \mathbb{R}.$$

Observație. Pentru relații de recurență de ordin superior lui doi se procedează similar, urmând următoarele etape:

1) se scrie şi se rezolvă ecuația caracteristică;

2) se scrie soluția generală a relației de recurență ca o combinație liniară a soluțiilor parțiale.

1.3 Şiruri în $\mathbb{R}^k$

Fie $\mathbb{R}^k = \left\{ x = (x_1, x_2, ..., x_k) \middle| x_i \in \mathbb{R},\ (\forall)\ i = \overline{1,k} \right\}$. Elementele lui $\mathbb{R}^k$ se numesc ***puncte*** sau ***vectori***.

Observație. Pe mulțimea $\mathbb{R}^k$ se definesc operațiile de adunare şi înmulțire cu numere reale prin:

1) $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_k + y_k),\ (\forall)\ x, y \in \mathbb{R}^k$;

2) $\alpha \cdot x = (\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot x_2, ..., \alpha \cdot x_k),\ (\forall)\ x \in \mathbb{R}^k,\ (\forall)\ \alpha \in \mathbb{R}$.

$(\mathbb{R}^k, +, \cdot)$ are o structură de spațiu vectorial peste corpul K.

Definiția 1.3.1. Fie $X \subset \mathbb{R}^k$. O aplicație $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to K, (K = \mathbb{R}, \mathbb{C})$ se numeşte ***produs scalar*** pe mulțimea X, dacă:

1) $\langle x, x \rangle \geq 0,\ (\forall)\ x \in X,\ \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = (0,0,...,0) \in \mathbb{R}^k$;

2) $\langle \lambda \cdot x, y \rangle = \langle x, \lambda \cdot y \rangle = \lambda \cdot \langle x, y \rangle,\ (\forall)\ x, y \in X,\ (\forall)\ \lambda \in K$;

3) $\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle,\ (\forall)\ x_1, x_2, y \in X$;

4) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle},\ (\forall)\ x, y \in X$, unde $\overline{\langle y, x \rangle}$ este conjugatul numărului complex $\langle y, x \rangle$.

Pentru $K = \mathbb{R}$ condiția 4) din definiția produsului scalar devine $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle,\ (\forall)\ x, y \in X$.

Observație. Pe spațiul vectorial $(\mathbb{R}^k, +, \cdot)$ se introduce produsul scalar de forma $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{k} x_i \cdot y_i$.

Definiția 1.3.2. Fie $X \subset \mathbb{R}^k$. O aplicație $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}_+$ se numeşte ***normă*** pe X, dacă:

1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = (0,0,...,0) \in \mathbb{R}^k$;

2) $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|,\ (\forall)\ x \in X,\ (\forall)\ \alpha \in K$;

3) $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$, $(\forall)$ $x, y \in X$.

Observație. Pe $\left(\mathbb{R}^k, +, \cdot\right)$ se introduce norma $\|\cdot\|_2 : X \to \mathbb{R}_+$ definită cu ajutorul produsului scalar prin $\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, $(\forall)$ $x \in \mathbb{R}^k$.

Rezultă că $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_k^2}$.

Definiția 1.3.3. Fie $a \in \mathbb{R}^k$ şi $r \in \mathbb{R}_+$. Mulțimea punctelor $x \in \mathbb{R}^k$ pentru care $\|x-a\|_2 < r$ se numeşte ***sfera deschisă*** cu centrul în *a* şi de rază *r*.

Definiția 1.3.4. Fie $a \in \mathbb{R}^k$ şi $r \in \mathbb{R}_+$. Mulțimea punctelor $x \in \mathbb{R}^k$ pentru care $\|x-a\|_2 \le r$ se numeşte ***sfera închisă*** cu centrul în *a* şi de rază *r*.

Observație. În cazul în care $a \in \mathbb{R}$ sfera deschisă devine mulțimea punctelor $x \in \mathbb{R}$ pentru care $|x-a| < r \Leftrightarrow x \in (a-r, a+r)$.

Notație. Vom nota cu $B_r(a)$ sfera cu centrul în *a* şi raza *r*.

Definiția 1.3.5. Mulțimea $A \subset \mathbb{R}^k$ se numeşte ***deschisă***, dacă pentru $(\forall)$ $a \in A$ există o sferă deschisă $B_r(a) \subset A$.

Exemplu

Intervalele $I_k = \left\{ x = (x_1, x_2, ..., x_k) \,\middle|\, a_i < x_i < b_i,\ i = \overline{1,k} \right\}$ sunt mulțimi deschise în $\left(\mathbb{R}^k, \|\cdot\|_2\right)$.

Definiția 1.3.6. Fie $a \in \mathbb{R}^k$. O mulțime $V \subset \mathbb{R}^k$ se numeşte ***vecinătate*** a punctului *a*, dacă există o mulțime deschisă inclusă în *V* şi care-l conține pe *a*.

Notație. Vom nota cu $V(a)$ mulțimea tuturor vecinătăților lui *a*.

Definiția 1.3.7. Fie $A \subset \mathbb{R}^k$. Un punct *a* se numeşte ***punct de acumulare*** pentru *A*, dacă $(\forall)$ $V \in V(a)$ verifică $(V \setminus \{a\}) \cap A \ne \varnothing$.

Definiția 1.3.8. Se numeşte ***şir*** în $\mathbb{R}^k$, $k \in \mathbb{N}^*$, o aplicație $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^k$, definită prin $f(n) = a_n$, $n \in \mathbb{N}$, unde $a_n = \left(a_{n_1}, a_{n_2}, ..., a_{n_k}\right) \in \mathbb{R}^k$.

Notație: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemplu

Șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n = \left(\sin\frac{n\pi}{2}, \frac{(-1)^n}{n}\right)$, $n\in\mathbb{N}^*$ este din $\mathbb{R}^2$.

Definiția 1.3.9. Șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}^k$ este ***convergent***, dacă există $a_0\in\mathbb{R}^k$, astfel încât $(\forall)\ \varepsilon>0$, $(\exists)\ n(\varepsilon)$ pentru care $\|a_n - a_0\|_2 < \varepsilon$, $(\forall)\ n > n(\varepsilon)$.

Observație. Pentru $a_n, a_0 \in \mathbb{R}^k$ avem:

$$\left|a_{n_i} - a_{0_i}\right| < \sqrt{\sum_{i=1}^{k}\left(a_{n_i} - a_{0_i}\right)^2} = \|a_n - a_0\|_2 < \sum_{i=1}^{k}\left|a_{n_i} - a_{0_i}\right|.$$

Din aceste inegalități rezultă că un șir din $\mathbb{R}^k$ este convergent dacă și numai dacă șirurile componente $\left(a_{n_i}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $i=1,2,...,k$, sunt convergente în $\mathbb{R}$.

Definiția 1.3.10. Șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}^k$ se numește ***șir Cauchy*** dacă pentru $(\forall)\ \varepsilon>0$, $(\exists)\ n(\varepsilon)$, astfel încât pentru $(\forall)\ n>n(\varepsilon)$ și pentru $(\forall)\ p\in\mathbb{N}^*$ să avem $\|a_{n+p} - a_n\|_2 < \varepsilon$.

Teorema 1.3.11. Condiția necesară și suficientă ca un șir $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}^k$ să fie convergent este ca el să fie șir Cauchy.

1.4 Aplicații

1.4.1 Să se determine punctele limită pentru următoarele șiruri:

a) $u_n = a^{(-1)^{n+1}} + \frac{1}{n}$; **b)** $u_n = \left(1 + \frac{\cos n\pi}{n}\right)^n$; **c)** $u_n = \sin\frac{n\pi}{4}$;

d) $u_n = (-1)^n \cdot \sqrt[n]{n}$; **e)** $u_n = (1+\cos n\pi)\cdot\frac{n}{n+1}$.

Indicație de rezolvare:

a) pentru n număr par, $u_n = \frac{1}{a} + \frac{1}{n} \to \frac{1}{a}$; pentru n număr impar $u_n = a + \frac{1}{n} \to a$; deci, punctele limită sunt a şi $\frac{1}{a}$;

b) e şi $\frac{1}{\mathrm{e}}$;

c) $-1,\ -\frac{\sqrt{2}}{2},\ 0,\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ 1$;

d) $-1,\ 1$;

e) pentru $n = 2k$ avem $u_{2k} = 2 \cdot \frac{2k}{2k+1}$, deci $\lim\limits_{k \to \infty} u_{2k} = 2$. Pentru $n = 2k+1$ avem $u_{2k+1} = 0$, deci $\lim\limits_{k \to \infty} u_{2k+1} = 0$. Se obțin punctele limită 2 şi 0.

1.4.2 Să se determine limitele inferioară şi superioară pentru următoarele şiruri:

a) $a_n = \frac{1 + (-1)^n}{2} + (-1)^n \cdot \frac{n}{2n+1}$;

b) $a_n = \frac{1}{n} \cdot n^{(-1)^n} + \sin^2 n\frac{\pi}{4}$;

c) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left[\frac{1}{2} + (-1)^n\right] + \cos n\frac{\pi}{2}$.

Indicație de rezolvare:

a) se determină punctele limită ale şirului; pentru n număr par $a_n = 1 + \frac{n}{2n+2} \to \frac{3}{2}$, iar pentru n număr impar $a_n = -\frac{n}{2n+1} \to -\frac{1}{2}$; deci, mulțimea punctelor limită este $L = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right\}$, de unde rezultă că $\limsup\limits_{n \to \infty} a_n = \frac{3}{2}$ şi $\liminf\limits_{n \to \infty} a_n = -\frac{1}{2}$;

b) $\limsup\limits_{n \to \infty} a_n = 2$ şi $\liminf\limits_{n \to \infty} a_n = \frac{1}{2}$;

c) $\limsup\limits_{n \to \infty} a_n = \frac{3}{2} \cdot \mathrm{e} + 1$ şi $\liminf\limits_{n \to \infty} a_n = -\frac{\mathrm{e}}{2}$.

1.4.3 Folosind teorema lui Weierstrass să se studieze convergența următoarelor şiruri:

a) $a_n = \dfrac{n^n}{(n!)^2}$; **b)** $a_n = \sqrt{a + a_{n-1}}$, $a > 0$, $a_0 = 0$;

c) $a_n = \dfrac{1}{2}\left(a_{n-1} + \dfrac{a}{a_{n-1}}\right)$, $a > 0$, $a_0 > 0$; **d)** $a_n = \dfrac{a}{2} - \dfrac{a_{n-1}^2}{2}$, $a_0 = 0, 0 < a < 1$;

e) $a_{n+1} = a_n(1 - a_n), 0 < a_0 < 1$; **f)** $a_n = 1 + \dfrac{2}{a_{n-1}}$, $a_0 = 1$;

g) $a_n = \dfrac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$, $b_n = \dfrac{a_{n-1} + 2 \cdot b_{n-1}}{3}$, $0 < a_0 < b_0$.

Indicație de rezolvare:

a) şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este cu termeni pozitivi, iar raportul

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{(n+1)^n}{n^n} = \frac{1}{n+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \frac{1}{n+1} \cdot \mathrm{e} < 1, \ (\forall)\ n \in \mathbb{N}^*,$$

de unde rezultă că şirul este monoton descrescător. Cum toți termenii sunt pozitivi, şirul va fi mărginit inferior de 0, deci este convergent.

Pentru calculul limitei, dacă $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, introducând limita în relația de recurență $a_{n+1} = a_n \cdot \dfrac{1}{n+1} \cdot \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$, se va obține $\ell = \ell \cdot 0 \cdot \mathrm{e}$, de unde $\ell = 0$;

b) şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir de numere pozitive şi monoton crescător, demonstrație ce se poate realiza prin inducție matematică după n. Presupunând că ar exista $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, aceasta va trebui să verifice relația de recurență, adică $\ell = \sqrt{a + \ell}$, de unde $\ell^2 - \ell - a = 0$ şi se obțin $\ell_1 = \dfrac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$, $\ell_2 = \dfrac{1 - \sqrt{1 + 4a}}{2}$.
Cum $\ell_2 < 0$ nu convine, termenii şirului fiind pozitivi, rezultă ca limită posibilă ℓ_1. Cum şirul este crescător, adică $a_{n-1} < a_n$ şi $a_1 = \sqrt{a} < a_n$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, rezultă $\dfrac{a_{n-1}}{a_n} < 1$, $\dfrac{a_1}{a_n} = \dfrac{\sqrt{a}}{a_n} < 1$, de unde $\dfrac{a}{a_n} < \sqrt{a}$.

Din relația de recurență ridicată la pătrat se va obține $a_n^2 = a + a_{n-1}$, adică $a_n = \dfrac{a}{a_n} + \dfrac{a_{n-1}}{a_n} < \sqrt{a} + 1$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$, adică şirul este mărginit superior, deci este convergent, iar ℓ_1 este limita sa;

c) convergent;

d) convergent;

e) convergent;

f) cum $a_0 > 0$ rezultă că $a_n > 1,\ (\forall)\ n \in \mathbb{N}$ şi $a_n = 1 + \dfrac{2}{a_{n-1}} < 1 + 2 = 3$, deci şirul este mărginit.

Pentru studiul monotoniei, se consideră

$$a_{n+2} - a_n = 2 \cdot \left(\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_{n-1}} \right) = \frac{4}{a_{n-2} \cdot a_{n-1} \cdot a_n \cdot a_{n+1}} \cdot (a_n - a_{n-2}),$$

deci $(a_{n+2} - a_n)$ are acelaşi semn cu $(a_n - a_{n-2})$.

Deoarece $a_2 - a_0 > 0$, rezultă că subşirul $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ este monoton crescător. Similar, deoarece $a_3 - a_1 < 0$, subşirul $(a_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ este descrescător.

Cum ambele subşiruri sunt şi mărginite rezultă că există limitele lor, de forma $\ell_1 = \lim\limits_{k\to\infty} a_{2k}$, $\ell_2 = \lim\limits_{k\to\infty} a_{2k+1}$.

În acelaşi timp $a_{2k+1} = 1 + \dfrac{2}{a_{2k}}$, $a_{2k+2} = 1 + \dfrac{2}{a_{2k+1}}$. Trecând la limită în cele două relaţii de recurenţă, obţinem $\ell_2 = 1 + \dfrac{2}{\ell_1}$, $\ell_1 = 1 + \dfrac{2}{\ell_2}$, echivalent cu $(\ell_2 - \ell_1) \cdot (\ell_1 \cdot \ell_2 - 2) = 0$. Dacă $\ell_1 \neq \ell_2$, rezultă că $\ell_1 \cdot \ell_2 = 2$, adică $\ell_1 = 0$, ceea ce este fals. Rezultă $\ell_1 = \ell_2$, deci şirul este convergent;

g) $a_1 = \dfrac{a_0 + b_0}{2} > a_0$, $b_1 = \dfrac{a_0 + 2 \cdot b_0}{3} < b_0$, $a_1 < b_1$. În continuare se demonstrează prin inducţie matematică $a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n,\ (\forall)\ n \in \mathbb{N}$, deci putem scrie $a_0 < a_1 < \ldots < a_n < \ldots < b_n < b_{n-1} < \ldots < b_1 < b_0$. Rezultă că există $\ell_1 = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ şi $\ell_2 = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ şi trecând la limită în relaţiile de recurenţă, obţinem $\ell_1 = \ell_2$.

1.4.4 Folosind teorema Cesaro-Stolz, să se calculeze următoarele limite:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2^n}$; **b)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^p + 2^p + \ldots + n^p}{n^{p+1}}$, $p + 1 > 0$; **c)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}}{n}$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}}{\ln n}$; **e)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$;

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 + \sqrt{2} + \ldots + \sqrt[n]{n}}{n\sqrt{n}}$; **g)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \left(\dfrac{a + b}{c + d} + \dfrac{a\sqrt{2} + b}{c\sqrt{2} + d} + \ldots + \dfrac{a\sqrt{n} + b}{c\sqrt{n} + d} \right)$.

Indicație de rezolvare:

a) Cu notațiile din teorema Cesaro-Stolz se consideră $a_n = n, b_n = 2^n$, de unde rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$;

b) $\dfrac{1}{p+1}$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\dfrac{1}{n+1}}{\ln(n+1)-\ln n} = 1$;

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = 2$;

f) 0;

g) $\dfrac{a}{c}$.

1.4.5 Să se calculeze limitele următoare:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$; **b)** $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\ln n}$; **c)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$;

Indicație de rezolvare:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)!}{n!} = \infty$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\ln n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(n+1)}{\ln n} = 1$;

c) $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$;

1.4.6 Fie $(u_n)_n$ un şir de numere pozitive, crescător şi divergent.

a) Să se arate că dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{u_{n-1}} = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_1+u_2+\ldots+u_n}{u_n} = \lambda'$, atunci $\lambda' = \dfrac{\lambda}{\lambda-1}$.

b) Să se arate că dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{u_{n-p}} = \lambda$, unde $\lambda \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_1 + u_2 + ... + u_n}{u_{n-p}} = \frac{\lambda^{p+1}}{\lambda - 1}$, $(\forall)\ p \geq 1$.

c) Să se arate că dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{u_{n-1}} = \lambda$, unde $\lambda \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_1 + u_2 + ... + u_n}{u_1 + u_2 + ... + u_{n-1}} = \lambda$.

d) Să se arate că dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{u_{n-1}} = \lambda$, unde $\lambda \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_1 + u_2 + ... + u_n}{u_1 + u_2 + ... + u_{n-p}} = \lambda^{p+1}$, $(\forall)\ p \geq 1$.

Indicație de rezolvare:

a) se consideră $a_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$, $b_n = u_n$ și se aplică Teorema Cesaro-Stolz; rezultă

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{u_1 + ... + u_n}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{u_n - u_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{u_n}{u_{n-1}}}{\frac{u_n}{u_{n-1}} - 1} = \frac{\lambda}{\lambda - 1}$$

și deci $\lambda' = \frac{\lambda}{\lambda - 1}$;

b) $\frac{u_1 + ... + u_n}{u_{n-p}} = \frac{u_1 + ... + u_n}{u_n} \cdot \frac{u_n}{u_{n-1}} \cdot \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \cdot ... \cdot \frac{u_{n-p+1}}{u_{n-p}}$;

rezultă

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_1 + ... + u_n}{u_{n-p}} = \frac{\lambda}{\lambda - 1} \cdot \lambda \cdot ... \cdot \lambda = \frac{\lambda^{p+1}}{\lambda - 1};$$

c) $\frac{u_1 + ... + u_n}{u_1 + ... + u_{n-1}} = 1 + \frac{u_n}{u_1 + ... + u_{n-1}} = 1 + \frac{u_n}{u_{n-1}} \cdot \frac{u_{n-1}}{u_1 + ... + u_{n-1}} =$

$$= 1 + \frac{u_n}{u_{n-1}} \cdot \frac{1}{\frac{u_1 + ... + u_{n-1}}{u_{n-1}}}.$$

Trecând la limită și ținând seama de punctul b), se va obține:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_1 + \ldots + u_n}{u_1 + \ldots + u_{n-1}} = 1 + \lambda \cdot \frac{\lambda - 1}{\lambda} = \lambda .$$

1.4.7 Utilizând criteriul general de convergență al lui Cauchy, să se demonstreze convergența șirurilor:

a) $u_n = \frac{\sin a_1}{2} + \frac{\sin a_2}{2^2} + \ldots + \frac{\sin a_n}{2^n}$;

b) $u_n = \frac{\cos a_1}{1 \cdot 2} + \frac{\cos a_2}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{\cos a_n}{n(n+1)}$;

c) $u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n}$;

d) $u_n = \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \ldots + \frac{1}{[1 + 3(n-1)] \cdot (1 + 3n)}$;

e) $u_n = \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 6} + \ldots + \frac{1}{(n+1)(n+4)}$;

f) $u_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$;

g) $u_n = \frac{\cos x}{3} + \frac{\cos 2x}{3^2} + \ldots + \frac{\cos nx}{3^n}$;

h) $u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$.

Indicație de rezolvare:

a) fiind dat $\varepsilon > 0$ arbitrar fixat, se va căuta un rang $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, astfel încât pentru $(\forall)$ $n \geq n(\varepsilon)$ și pentru $(\forall)$ $p \in \mathbb{N}^*$ să se verifice $\left| u_{n+p} - u_n \right| < \varepsilon$

$$\left| u_{n+p} - u_n \right| = \left| \frac{\sin a_{n+1}}{2^{n+1}} + \ldots + \frac{\sin a_{n+p}}{2^{n+p}} \right| < \frac{1}{2^{n+1}} + \ldots + \frac{1}{2^{n+p}} =$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{p-1}} \right) = \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^p}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n} \cdot \left(1 - \frac{1}{2^p} \right) < \frac{1}{2^n}$$

şi cum $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^n}=0$ se poate găsi un rang, de exemplu $n(\varepsilon)=\left[\dfrac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\ln 2}\right]+1$, pentru care $|u_{n+p}-u_n|<\dfrac{1}{2^n}<\varepsilon$, $(\forall)\ n\ge n(\varepsilon)$, $(\forall)\ p\in\mathbb{N}^*$, deci şirul este convergent;

c) $|u_{n+p}-u_n|=\left|\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}+\ldots+(-1)^{p-1}\cdot\dfrac{1}{n+p}\right|$; dacă p este număr par, atunci

$$|u_{n+p}-u_n|=\left|\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}\right|=$$

$$=\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}\right)<$$

$$<\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+4}+\frac{1}{n+4}-\ldots-\frac{1}{n+p-2}+\frac{1}{n+p-2}-\frac{1}{n+p}=$$

$$=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n+1}.$$

Dacă p este impar, atunci

$$|u_{n+p}-u_n|=\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}\right)+\ldots+\frac{1}{n+p}<$$

$$<\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+4}+\ldots+\frac{1}{n+p-2}-\frac{1}{n+p-1}+\frac{1}{n+p-1}=$$

$$=\frac{1}{n+1}.$$

Cum $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}=0$, se poate găsi un rang $n(\varepsilon)=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}-1\right]+1$, pentru care $|u_{n+p}-u_n|<\dfrac{1}{n+1}<\varepsilon$, $(\forall)\ n\ge n(\varepsilon)$, $(\forall)\ p\in\mathbb{N}^*$, deci şirul este convergent;

d) $u_n=\dfrac{1}{3}\left[1-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{7}+\ldots+\dfrac{1}{1+3(n-1)}-\dfrac{1}{1+3n}\right]=\dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{1}{1+3n}\right)$, de unde $|u_{n+p}-u_n|=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{1+3n}-\dfrac{1}{1+3n+3p}\right)<\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{1+3n}<\dfrac{1}{n}<\varepsilon$;

e)

$$u_n = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}+\frac{1}{4}-\frac{1}{7}+\frac{1}{5}-\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+4}\right]=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}\right).$$

Rezultă $\left|u_{n+p}-u_n\right| < \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\frac{1}{n+4}\right) < \frac{1}{n} < \varepsilon$, deci şirul este convergent.

1.4.8 Se consideră şirul $(u_n)_n$ definit prin relaţia de recurenţă: $u_n = a \cdot u_{n-1} + b,\ a,\ b,\ u_0$ fiind daţi. Să se găsească expresia lui u_n în funcţie de a, b şi u_0. În acest caz există $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$?

Indicaţie de rezolvare:

$$\begin{cases} u_1 = a \cdot u_0 + b \\ u_2 = a \cdot u_1 + b \\ \ldots \\ u_n = a \cdot u_{n-1} + b \end{cases}$$

şi înmulţim prima ecuaţie cu a^{n-1}, pe a doua cu a^{n-2} şi aşa mai departe, ultima cu a. Prin adunare, vom obţine:

$$u_n = a^n u_0 + b\left(1 + a + a^2 + \ldots + a^{n-1}\right) = a^n u_0 + b \cdot \frac{1-a^n}{1-a}.$$

Dacă $|a| > 1,\ \lim\limits_{n\to\infty} a^n = \infty$; deci, u_n nu are limită.

Dacă $|a| < 1,\ \lim\limits_{n\to\infty} u_n = \frac{b}{1-a}$.

Dacă $a = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \pm\infty$, în funcţie de semnul lui b.

Dacă $a = -1$, $u_{2p} = u_0$, $u_{2p+1} = b - u_0$, şirul reducându-se la două puncte distincte, deci nu are limită. Rezultă că şirul are limită doar în cazul $|a| < 1$.

1.4.9 Să se studieze convergenţa şirurilor:

a) $x_1 = 1,\ x_2 = 3,\ x_{n+2} = 5 \cdot x_{n+1} - 6 \cdot x_n,\ n \geq 1$;

b) $x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_{n+2} = x_{n+1} - \frac{x_n}{4},\ n \geq 1$;

c) $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2},\ x_2 = 1,\ x_{n+2} = \sqrt{2} \cdot x_{n+1} - x_n,\ n \geq 1$.

Indicație de rezolvare:

a) ecuația caracteristică este $r^2 - 5 \cdot r + 6 = 0 \Rightarrow r_1 = 2,\ r_2 = 3$ şi se aplică propoziția corespunzătoare cazului I; obținem $x_n = c \cdot 2^n + d \cdot 3^n$ şi punând condițiile $x_1 = 1$ şi $x_2 = 3$, rezultă că $x_n = 3^{n-1}$, care este divergent;

b) ecuația caracteristică este $r^2 - r + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = \frac{1}{2}$; aplicându-se propoziția corespunzătoare cazului II, rezultă $x_n = c \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + d \cdot n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$ şi punând condiția ca $x_1 = 0,\ x_2 = 1 \Rightarrow c = -4,\ d = 4$, rezultă

$$x_n = -4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + 4 \cdot n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 0;$$

c) divergent.

1.4.10 Fie $a > b > 0$ şi două şiruri $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definite prin:

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_n + b_n},\ a_0 = a \quad \text{şi} \quad b_{n+1} = \frac{b_n^2}{a_n + b_n},\ b_0 = b.$$

Să se studieze $a_{n+1} - b_{n+1}$ şi $\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}$ şi să se deducă limitele celor două şiruri.

Indicație de rezolvare:

$$a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{a_n^2 - b_n^2}{a_n + b_n} = a_n - b_n = \ldots = a_0 - b_0 = a - b > 0.$$

$$\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} = \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2 = \left(\frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}\right)^4 = \ldots = \left(\frac{b}{a}\right)^{2n+2}.$$

Cum $\frac{b}{a} < 1$, rezultă $\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} = 0$. În acelaşi timp, $\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1} - a + b}{a_{n+1}}$, deci $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a + b}{a_{n+1}} = 0$. Se va obține astfel $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n = a - b$ şi $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

1.4.11 Se consideră şirurile $(a_n)_n$ şi $(b_n)_n$, care verifică următoarele condiții:

1) termenii şirului $(b_n)_n$ sunt pozitivi;

2) $s_n = b_1 + b_2 + ... + b_n$ are limita infinită;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell$.

În aceste condiții se verifică $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{b_1 + b_2 + ... + b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$.

Indicație de rezolvare:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \infty,\ \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell \Leftrightarrow \left|\frac{a_n}{b_n} - \ell\right| < \frac{\varepsilon}{2},\ (\forall)\ n \geq n(\varepsilon) \Leftrightarrow \frac{a_k}{b_k} - \ell = \varepsilon_k,\ k = 1,2,...,n.$$

Rezultă $a_k = (\ell - \varepsilon_k)\cdot b_k; |\varepsilon_k| < \frac{\varepsilon}{2}$. Luând $k = 1,2,...,n$ şi însumând, se va obține

$$a_1 + a_2 + ... + a_n = \ell\cdot(b_1 + b_2 + ... + b_n) + \varepsilon_1\cdot b_1 + ... + \varepsilon_n \cdot b_n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{s_n} - \ell =$$

$$= \frac{\varepsilon_1\cdot b_1 + \varepsilon_2\cdot b_2 + ... + \varepsilon_N\cdot b_N}{s_n} + \frac{\varepsilon_{N+1}\cdot b_{N+1} + ... + \varepsilon_n\cdot b_n}{s_n},$$

unde $N = n(\varepsilon)$.

Atunci

$$\left|\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{s_n} - \ell\right| \leq \left|\frac{\varepsilon_1\cdot b_1 + ... + \varepsilon_N\cdot b_N}{s_n}\right| + \left|\frac{\varepsilon_{N+1}\cdot b_{N+1} + ... + \varepsilon_n\cdot b_n}{s_n}\right|.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\varepsilon_1\cdot b_1 + ... + \varepsilon_N\cdot b_N}{s_n}\right| = 0,$$

iar

$$\left|\frac{\varepsilon_{N+1}\cdot b_{N+1} + ... + \varepsilon_n\cdot b_n}{s_n}\right| \leq \frac{|\varepsilon_{N+1}|b_{N+1} + ... + |\varepsilon_n|b_n}{s_n} <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{b_{N+1} + ... + b_n}{s_n} = \frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{s_n - (b_1 + ... + b_N)}{s_n} = \frac{\varepsilon}{2}\left(1 - \frac{b_1 + ... + b_N}{s_n}\right).$$

Rezultă $\left|\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{s_n} - \ell\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\left(1 - \frac{b_1 + ... + b_n}{s_n}\right) < \varepsilon$.

1.4.12 Să se arate că dacă $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ şi $B_n = b_{n+1} + b_{n+2} + \ldots + b_{2n}$ cu $b_n > 0$ are limita egală cu *b*, atunci

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_{n+1}\cdot b_{n+1} + a_{n+2}\cdot b_{n+2} + \ldots + a_{2n}\cdot b_{2n}\right) = a\cdot b.$$

Indicație de rezolvare:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow (\forall)\ \varepsilon > 0,\ (\exists)\ n_1(\varepsilon)\in \mathbb{N},$$

astfel încât pentru $(\forall)\ n \geq n_1(\varepsilon)$ să rezulte $|a_n - a| < \varepsilon$.

De asemenea, din $\lim_{n\to\infty} B_n = b$ rezultă că $|B_n - b| < \varepsilon,\ (\forall)\ n \geq n_2(\varepsilon)$.

Cum şirurile $(a_n)_n$ şi $(B_n)_n$ sunt convergente, ele sunt mărginite, adică $(\exists)\ M_1 \geq 0$, astfel încât $|a_n| \leq M_1,\ (\forall)\ n \geq n_3$ şi $(\exists)\ M_2 \geq 0$, astfel încât $|B_n| \leq M_2,\ (\forall)\ n \geq n_4$.

Se notează $a_n - a = \alpha_n$ şi $B_n - b = \beta_n$ şi se consideră

$$n(\varepsilon) = \max\left(n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon), n_3, n_4\right).$$

Atunci

$$\left|a_{n+1}\cdot b_{n+1} + \ldots + a_{2n}\cdot b_{2n} - a\cdot b\right| = \left|(\alpha_{n+1} + a)\cdot b_{n+1} + \ldots + (\alpha_{2n} + a)\cdot b_{2n} - a\cdot b\right| =$$
$$= \left|(\alpha_{n+1}\cdot b_{n+1} + \ldots + \alpha_{2n}\cdot b_{2n}) + a\cdot B_n - a\cdot b\right| \leq$$
$$\leq |\alpha_{n+1}|\cdot|b_{n+1}| + \ldots + |\alpha_{2n}|\cdot|b_{2n}| + |a|\cdot|B_n - b| < \varepsilon\cdot\left(M + |a|\right),$$

unde $M = \max(M_1, M_2)$.

Rezultă

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_{n+1}\cdot b_{n+1} + a_{n+2}\cdot b_{n+2} + \ldots + a_{2n}\cdot b_{2n}\right) = a\cdot b.$$

TEST DE AUTOEVALUARE

1 Folosind criteriul lui Cauchy, să se demonstreze divergența şirurilor:

a) $u_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$;

b) $u_n = \sin n$; **c)** $u_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}}$.

2 Să se studieze convergența şirurilor:

a) $x_{n+1} = \frac{2 \cdot a \cdot x_n}{a + x_n}$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, cu $x_0 > 0$;

b) $x_{n+1} = x_n^2 - 2 \cdot x_n + 2,\ n \geq 1,\ x_1 \in [1,2]$;

c) $x_{n+1}^2 = 3 \cdot x_n - 2,\ n \geq 1,\ x_1 = \frac{3}{2}$;

d) $x_{n+1} = 3 + \frac{1}{x_n},\ n \geq 0,\ x_0 = 3$.

3 Să se arate că şirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definit prin

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdot ... \cdot \left(1 - \frac{n}{n+1}\right)$$

este convergent şi să se calculeze limita sa.

4 Să se arate că şirul cu termenul general $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ este convergent şi să se deducă inegalitatea $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \mathrm{e} < \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n$.

5 Să se calculeze limitele următoare:

a) $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2)...(2n)}$;

b) $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{(a+1)(a+2)...(a+n)}{n!}}$, $a > -1$.

LECȚIA 2

1.5 Serii de numere. Criterii de convergență

Definiția 1.5.1. Fie $(a_n)_n$ un şir de numere reale şi $(s_n)_n$ un şir definit prin: $s_1 = a_1, s_2 = a_1 + a_2, ..., s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$. Se numeşte serie de numere reale asociată şirului $(a_n)_n$, simbolul $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, iar $(s_n)_n$ se numeşte şirul sumelor sale parțiale.

Seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ de numere reale se numeşte ***convergentă*** şi are suma *s*, dacă şi numai dacă şirul sumelor parțiale $(s_n)_n$ este convergent şi are limita *s*; $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s = \lim_{n\to\infty} s_n$. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ de numere reale se numeşte ***divergentă***, dacă şirul sumelor parțiale este divergent.

Criteriul general de convergență al lui Cauchy

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă $\Leftrightarrow (\forall)\ \varepsilon > 0,\ (\exists)\ n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, astfel încât

$$\left|a_{n+1} + ... + a_{n+p}\right| < \varepsilon,\ (\forall)\ n \geq n(\varepsilon),\ (\forall)\ p \in \mathbb{N}^*.$$

Pentru $p = 1$ se obține:

Criteriu necesar de convergență. Condiția necesară, dar nu şi suficientă, ca o serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ să fie convergentă este ca $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Exemplu

Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este divergentă, cu toate că $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

1.6 Serii cu termeni pozitivi. Criterii de convergență

Criteriul I al comparației

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ două serii cu termeni pozitivi, astfel ca $a_n \le b_n$, $(\forall)\ n \ge n_0$. Atunci:

a) dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ este convergentă, seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ va fi convergentă;

b) dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă, seria $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ va fi divergentă.

Criteriul II al comparației

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ două serii cu termeni pozitivi, astfel ca $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n}$, $(\forall)\ n \ge n_0$.

Atunci:

a) dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ este convergentă, seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ va fi convergentă;

b) dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă, seria $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ va fi divergentă.

Criteriul la limită

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ două serii cu termeni pozitivi, astfel ca $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = K$.

Atunci:

a) dacă $0 < K < +\infty$, cele două serii au aceeaşi natură;

b) dacă $K = 0$, iar seria $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ este convergentă, seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ va fi convergentă;

c) dacă $K = +\infty$, iar seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă, seria $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ va fi divergentă.

Criteriul rădăcinii (al lui Cauchy)

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o serie cu termeni pozitivi. Dacă există un număr natural N şi un număr $q \in (0,1)$, astfel încât pentru $(\forall)\ n > N$ să avem $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$, seria este convergentă, iar dacă $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, $(\forall)\ n > N$, seria este divergentă.

Corolar

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o serie cu termeni pozitivi şi $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lambda$. Atunci:

a) dacă $\lambda < 1$, seria este convergentă;
b) dacă $\lambda > 1$, seria este divergentă;
c) pentru $\lambda = 1$, criteriul nu se aplică.

Criteriul raportului (al lui d′Alembert)

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o serie cu termeni pozitivi. Dacă există un număr natural N şi un număr $q \in (0,1)$, astfel încât pentru $(\forall)\ n > N$ să avem $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$, seria este convergentă, iar dacă $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, $(\forall)\ n > N$, seria este divergentă.

Corolar

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o serie cu termeni pozitivi şi $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda$. Atunci:

a) dacă $\lambda < 1$, seria este convergentă;
b) dacă $\lambda > 1$, seria este divergentă;
c) pentru $\lambda = 1$, criteriul nu se aplică.

Exemple

1) Se consideră seria $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \ldots$. Să se arate că ea este convergentă şi că $\limsup_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, iar $\liminf_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$.

Indicație de rezolvare:

Seria are aceeaşi natură cu seria $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} \right)$.

Cum $\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}<\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^{n-1}}$, $(\forall)\ n\in \mathbb{N}$, din criteriul I de comparaţie rezultă convergenţa seriei.

$$u_n=\begin{cases}\frac{1}{3^n} & \text{pentru } n \text{ par}\\ \frac{1}{2^n} & \text{pentru } n \text{ impar}\end{cases} \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n}=\begin{cases}\left(\frac{3}{2}\right)^n\cdot\frac{1}{2} & \text{pentru } n \text{ par}\\ \left(\frac{2}{3}\right)^n\cdot\frac{1}{3} & \text{pentru } n \text{ impar}\end{cases}$$

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\infty>1, \quad \text{iar} \quad \liminf_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=0<1.$$

2) Să se arate că seria $\frac{1}{2}+2+\frac{1}{2^2}+2^2+\ldots+\frac{1}{2^n}+2^n+\ldots$ este divergentă şi $\limsup\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$, iar $\liminf\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$.

Indicaţie de rezolvare:

Seria are aceeaşi natură cu seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+2^n\right)$, care este divergentă, deoarece $\frac{1}{2^n}+2^n>2^n$, $(\forall)\ n\in \mathbb{N}$.

$$u_n=\begin{cases}2^n & \text{pentru } n \text{ par}\\ \frac{1}{2^n} & \text{pentru } n \text{ impar}\end{cases} \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n}=\begin{cases}\frac{1}{2^{2n+1}} & \text{pentru } n \text{ par}\\ 2^{2n+1} & \text{pentru } n \text{ impar}\end{cases}$$

Rezultă că $\limsup\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\infty>1$, iar $\liminf\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=0<1$.

Observaţie. Criteriul raportului dă numai condiţii suficiente de convergenţă şi divergenţă, aşa după cum rezultă din exemplele anterioare.

Criteriul logaritmic

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o serie cu termeni pozitivi. Dacă există un număr natural N şi un număr $q>1$, astfel încât pentru $(\forall)\ n>N$ să avem $\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} \geq q > 1$, seria este convergentă, iar dacă $\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} < 1,\ (\forall)\ n>N$, seria este divergentă.

Corolar

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o serie cu termeni pozitivi şi $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} = \lambda$. Atunci:

a) pentru $\lambda > 1$, seria este convergentă;
b) pentru $\lambda < 1$, seria este divergentă;
c) pentru $\lambda = 1$, criteriul nu se aplică.

Criteriul lui Kummer

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o serie cu termeni pozitivi. Dacă există un şir de numere $(c_n)_n \subset \mathbb{R}_+^*$ şi un număr natural N şi un număr $\lambda > 0$, astfel încât $\left(c_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1}\right) \geq \lambda > 0,\ (\forall)\ n>N$, seria este convergentă.

Dacă $\left(c_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1}\right) \leq 0,\ (\forall)\ n>N$, şi seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n}$ este divergentă, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă.

Corolar

Fie şirul $(c_n)_n \subset \mathbb{R}_+^*$, astfel încât seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n}$ este divergentă. Atunci seria cu termeni pozitivi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este:

a) convergentă, dacă $\lim_{n\to\infty}\left(c_n\cdot\frac{a_n}{a_{n+1}}-c_{n+1}\right)>0$;

b) divergentă, dacă $\lim_{n\to\infty}\left(c_n\cdot\frac{a_n}{a_{n+1}}-c_{n+1}\right)\le 0$.

Exemplu

Se consideră seria $\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot a^n,\ a>0$. În acest caz, $c_n=n$, iar seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{c_n}$ este divergentă; $\lim_{n\to\infty}\left(c_n\cdot\frac{a_n}{a_{n+1}}-c_{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2(1-a)-2an-a}{a(n+1)}=\begin{cases}\infty, & a<1;\\ -\infty, & a>1;\\ -2, & a=1,\end{cases}$

de unde rezultă că seria este convergentă pentru $a\in(0,1)$.

Criteriul Raabe-Duhamel

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o serie cu termeni pozitivi. Dacă există un număr natural N şi un număr $\lambda>1$, astfel încât pentru $(\forall)\ n>N$ să avem $n\cdot\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\ge\lambda>1$, seria este convergentă, iar dacă $n\cdot\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\le 1,\ (\forall)\ n>N$, seria este divergentă.

Corolar

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o serie cu termeni pozitivi şi $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lambda$. Atunci:

a) pentru $\lambda>1$, seria este convergentă;
b) pentru $\lambda<1$, seria este divergentă;
c) pentru $\lambda=1$, criteriul nu se aplică.

Criteriul de condensare al lui Cauchy

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ o serie cu termeni pozitivi şi descrescători, iar $(a_n)_n$ un şir divergent de numere naturale, astfel încât şirul cu termenul general $\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n-a_{n-1}}$ să fie mărginit. Atunci seriile $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ şi $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)\cdot u_{a_n}$ au aceeaşi natură.

Observație. Șirul $(a_n)_n$ se alege cel mai frecvent ca fiind $a_n = 2^n$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$, care satisface condițiile criteriului de condensare.

Criteriul lui Bertrand

Seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ cu termeni pozitivi este:

1) convergentă, dacă $\lim_{n\to\infty} \ln n \cdot \left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right] > 1$;

2) divergentă, dacă $\lim_{n\to\infty} \ln n \cdot \left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right] < 1$.

Exemplu

Se consideră seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{\alpha(\alpha+1)\cdot \ldots \cdot (\alpha+n-1)}$.

$$\lim_{n\to\infty} \ln n \cdot \left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right] = \lim_{n\to\infty} \ln n \cdot \left[\frac{n(\alpha-2)-1}{n+1} \right] = \begin{cases} -\infty, & \alpha < 2; \\ 0, & \alpha = 2; \\ \infty, & \alpha > 2, \end{cases},$$

de unde rezultă că seria este convergentă pentru $\alpha > 2$ și divergentă pentru $\alpha \le 2$.

Criteriul lui Gauss

Seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ cu termeni pozitivi pentru care $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^2}$, unde $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$, iar șirul $(\theta_n)_n$ este mărginit, este:

1) convergentă, dacă $\lambda > 1$ sau dacă $\lambda = 1;\ \mu > 1$;

2) divergentă, dacă $\lambda < 1$ sau dacă $\lambda = 1;\ \mu \le 1$.

Exemplu

Seria hipergeometrică

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\cdot\beta\cdot(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{n!\gamma\cdot(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)} \cdot x^n =$$
$$= 1 + \frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}\cdot x + \frac{\alpha(\alpha+1)\cdot\beta\cdot(\beta+1)}{2!\gamma(\gamma+1)}\cdot x^2 + \ldots$$

$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(n+1)(\gamma+n)}\cdot x \to x \quad \text{pentru} \quad n\to\infty .$$

Din criteriul raportului rezultă că seria este convergentă pentru $x<1$ şi divergentă pentru $x>1$.

Pentru $x=1 \Rightarrow \dfrac{a_n}{a_{n+1}}=\dfrac{(n+1)(\gamma+n)}{(\alpha+n)(\beta+n)}=\dfrac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{\gamma}{n}\right)}{\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)\left(1+\frac{\beta}{n}\right)}$.

Se utilizează dezvoltarea $\dfrac{1}{1+\frac{\alpha}{n}}=1-\dfrac{\alpha}{n}+\dfrac{\alpha^2}{\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)}\cdot\dfrac{1}{n^2}$

şi

$$\frac{1}{1+\frac{\beta}{n}}=1-\frac{\beta}{n}+\frac{\beta^2}{\left(1+\frac{\beta}{n}\right)}\cdot\frac{1}{n^2}.$$

Se poate scrie $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=1+\dfrac{\gamma-\alpha-\beta+1}{n}+\dfrac{\theta_n}{n^2}$, unde $(\theta_n)_n$ este un şir mărginit. Aplicând criteriul lui Gauss, seria este convergentă pentru $\gamma-\alpha-\beta>0$ şi divergentă pentru $\gamma-\alpha-\beta\le 0$.

Criteriul integral Mac Laurin-Cauchy

Fie seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, care se poate scrie sub forma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$, unde funcţia f este continuă, pozitivă şi monoton descrescătoare.

Atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este:

a) convergentă, dacă $(\exists)\lim_{x\to\infty} F(x)<\infty$;

b) divergentă, dacă $(\exists)\lim_{x\to\infty} F(x)=+\infty$,

unde F este o primitivă a lui f.

Exemple

1) Să se studieze convergenţa seriei $\sum_{n=3}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n\cdot\ln(\ln n)}$.

Indicație de rezolvare:

$$f(x)=\frac{1}{x\ln x\cdot\ln\ln x}\Rightarrow F(x)=\ln\ln\ln x\text{, iar }\lim_{x\to\infty}F(x)=+\infty,$$

deci seria este divergentă.

2) Să se studieze convergența seriei $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\cdot(\ln n)^{1+\sigma}},\ \sigma>0$.

Indicație de rezolvare:

$$f(x)=\frac{1}{x\cdot(\ln x)^{1+\sigma}}\Rightarrow F(x)=-\frac{1}{\sigma\cdot(\ln x)^{\sigma}}$$

şi cum $\lim_{x\to\infty}F(x)=0$ rezultă că seria este convergentă.

Criteriul lui Ermakov

Fie seria $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, care se poate scrie sub forma $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$, unde funcția f este continuă, pozitivă şi monoton descrescătoare.

Atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ este:

a) convergentă, dacă $(\exists)\ x_0\geq 1$, astfel încât $\frac{f\left(e^x\right)\cdot e^x}{f(x)}\leq q<1,\ x\geq x_0$;

b) divergentă, dacă $(\exists)\ x_0\geq 1$, astfel ca $\frac{f\left(e^x\right)\cdot e^x}{f(x)}\geq 1,\ x\geq x_0$.

Exemplu

Să se studieze natura seriei $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln n(\ln\ln n)^{1+\sigma}},\ \sigma>0$.

Indicație de rezolvare:

$$f(x)=\frac{1}{x\cdot\ln x(\ln\ln x)^{1+\sigma}}\Rightarrow\frac{f\left(e^x\right)\cdot e^x}{f(x)}=\frac{(\ln\ln x)^{1+\sigma}}{(\ln x)^{\sigma}},$$

iar $\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln\ln x)^{1+\sigma}}{(\ln x)^{\sigma}}=0$, deci seria este convergentă.

1.7 Serii absolut convergente. Serii alternate

Definiția 1.7.1. O serie cu termenii oarecare $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ se numeşte ***absolut convergentă***, dacă seria modulelor $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ este convergentă.

Definiția 1.7.2. Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă, dar seria modulelor $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ este divergentă, seria se numeşte ***semiconvergentă***.

Teorema 1.7.3. O serie cu termeni oarecare absolut convergentă este convergentă.

Observație. Reciproca teoremei nu este adevărată, deoarece există serii convergente, dar care nu sunt absolut convergente.

Exemplu: Seria lui Riemann $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n^{\alpha}}$, pentru $\alpha > 1$ este absolut convergentă, iar pentru $\alpha \leq 1$ este semiconvergentă.

Observație. Seriile cu termeni pozitivi sunt absolut convergente. Criteriile de convergență stabilite la seriile cu termeni pozitivi sunt valabile şi pentru seriile absolut convergente.

Teorema 1.7.4. Dacă într-o serie absolut convergentă se schimbă ordinea termenilor în mod arbitrar, obținem o nouă serie absolut convergentă cu aceeaşi sumă.

Observație. Teorema este valabilă şi pentru seriile cu termeni pozitivi care sunt absolut convergente.

Teorema lui Riemann. Într-o serie de numere reale, semiconvergentă, se poate schimba ordinea factorilor, astfel încât seria obținută să aibă ca sumă un număr dat.

Exemplu

Fie seria semiconvergentă $S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} + \ldots$.

Se pot schimba termenii în ordinea

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2(2n+1)} - \frac{1}{2(2n+2)} + \ldots,$$

iar noua serie are suma $\frac{1}{2} \cdot S$.

Criterii de convergență simplă (semiconvergență)

Criteriul lui Dirichlet

Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se poate scrie sub forma $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \cdot v_n$, unde şirul $(u_n)_n$ este monoton şi mărginit, iar seria $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ este convergentă, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă.

Criteriul lui Abel

Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se poate scrie sub forma $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \cdot v_n$, unde $(u_n)_n$ este un şir de numere pozitive descrescător şi convergent la zero, iar seria $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ are şirul sumelor parțiale mărginit, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă.

Exemplu

Să se arate că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{\sin nx}{n}$ este convergentă pentru $x \neq 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Indicație de rezolvare:

Şirul cu termenul general $u_n = \dfrac{1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}}{n}$ este monoton descrescător şi convergent la zero (utilizând teorema Cesaro-Stolz), iar seria $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$ are şirul sumelor parțiale mărginit, deoarece $\sum_{k=1}^{n} \sin kx = \dfrac{\cos\frac{x}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot x}{2\cdot \sin\frac{x}{2}}$, de unde

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \sin kx\right| \le \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|},\ x \ne 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\ .$$

Definiția 1.7.5. Se numeşte ***serie alternată*** o serie de forma $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot u_n$, unde $u_k \ge 0,\ (\forall)\ k \in \mathbb{N}^*$.

Criteriul lui Leibniz

Dacă într-o serie alternată $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot u_n$ şirul $(u_n)_n$ este monoton descrescător şi are limita zero, atunci seria este convergentă.

1.8 Operații cu serii

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ două serii. Atunci seriile $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, unde $c_n = a_1 \cdot b_n + a_2 \cdot b_{n-1} + ... + a_n \cdot b_1$ se numesc, respectiv, ***suma***, ***diferența*** şi ***produsul seriilor*** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Dacă seriile $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sunt convergente şi au sumele *A* şi *B*, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$ este convergentă şi are suma $A \pm B$.

Teorema lui Abel

Dacă seriile $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ şi seria produs $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ sunt convergente şi dacă *A*, *B*, *C* sunt, respectiv, sumele lor, atunci $A \cdot B = C$.

Teorema lui Mertens

Dacă seriile $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sunt convergente şi cel puţin una dintre ele este absolut convergentă, atunci seria produs $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ este convergentă şi $A \cdot B = C$.

Teorema lui Cauchy

Dacă seriile $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sunt absolut convergente, atunci seria produs $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ este absolut convergentă.

1.9 Serii în $\mathbb{R}^k$. Serii de numere complexe

Fie şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elemente din $\mathbb{R}^k$ şi

$s_1 = a_1$

$s_2 = a_1 + a_2$

...

$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

...

Şirul $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se numeşte ***şirul sumelor parţiale*** pentru seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Definiția 1.9.1. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este ***convergentă***, dacă şirul sumelor parțiale este convergent.

Suma seriei este limita şirului sumelor parțiale.

Criteriul general al lui Cauchy

Seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ de elemente din $\mathbb{R}^k$ este convergentă dacă şi numai dacă pentru $(\forall)\ \varepsilon > 0$, $(\exists)\ n(\varepsilon)$, astfel încât $\left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right\|_2 < \varepsilon$, $(\forall)\ n > n(\varepsilon)$ şi $(\forall)\ p \in \mathbb{N}^*$.

Consecință. Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ de elemente din $\mathbb{R}^k$ este convergentă, atunci $\lim_{n\to\infty} \|a_n\|_2 = 0$, iar aceasta reprezintă o condiție necesară, dar nu suficientă de convergență a unei serii.

Definiția 1.9.2. Se numeşte ***şirul sumelor parțiale*** pentru seria de numere complexe $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$, şirul $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definit prin:

$$
\begin{aligned}
&s_1 = z_1 \\
&s_2 = z_1 + z_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&s_n = z_1 + z_2 + \ldots + z_n \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Definiția 1.9.3. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ de numere complexe este ***convergentă***, dacă şirul sumelor parțiale este convergent.

Teorema 1.9.4. Seria de numere complexe $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$, unde $z_n = a_n + \mathrm{i}\cdot b_n$, pentru $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$, este convergentă dacă şi numai dacă seriile de numere reale

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sunt convergente. Dacă $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ este convergentă şi are suma $s = a + \mathrm{i}\cdot b$, atunci $a = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ şi $b = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Criteriul lui Cauchy

Seria de numere complexe $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ este convergentă dacă şi numai dacă $(\forall)\ \varepsilon > 0,\ (\exists)\ n(\varepsilon)$, astfel încât $\left|z_{n+1} + z_{n+2} + \ldots + z_{n+p}\right| < \varepsilon,\ (\forall)\ n > n(\varepsilon)$ şi $(\forall)\ p \in \mathbb{N}^*$.

Definiția 1.9.5. Fie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ o serie de numere complexe. Dacă seria de numere reale $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ este convergentă, spunem că seria $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ este ***absolut convergentă***.

Teorema 1.9.6. O serie de numere complexe absolut convergentă este convergentă.

Definiția 1.9.7. Seriile de numere complexe convergente, pentru care seria modulelor nu este convergentă se numesc serii de numere complexe ***semiconvergente***.

Teorema 1.9.8. Seria de numere complexe $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$, unde $z_n = a_n + \mathrm{i}\cdot b_n$ este absolut convergentă dacă şi numai dacă seriile de numere reale $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sunt absolut convergente.

1.10 Aplicații

1.10.1 Să se arate că următoarele serii sunt convergente şi să se determine sumele lor:

a) $\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+...+(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{3^n}+...$; **b)** $\frac{1}{a}+\frac{2}{a^2}+...+\frac{n}{a^n}+..., |a|>1$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+a+1}-2\cdot\sqrt{n+a}+\sqrt{n+a-1}\right),\ a>0$;

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(a+n)\cdot(a+n+1)},\ a\in \square \setminus \square$; **e)** $\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$;

f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}{\sqrt{4n^2-1}}$.

Indicație de rezolvare:

a) Şirul sumelor parțiale are termenul general

$$s_n=\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+...+(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{3^n}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n}{1+\frac{1}{3}}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}s_n=\frac{1}{4},$$

deci seria este convergentă şi are suma $s=\frac{1}{4}$;

b) $s_n=\frac{1}{a}+\frac{2}{a^2}+...+\frac{n}{a^n}$. Pentru calculul limitei şirului sumelor parțiale se consideră funcția $f(x)=\frac{x}{a}+\left(\frac{x}{a}\right)^2+...+\left(\frac{x}{a}\right)^n,\ x\in\square$. Atunci $s_n=f'(1)$.

În acelaşi timp,

$$f(x)=\frac{x}{a}\cdot\frac{1-\left(\frac{x}{a}\right)^n}{1-\frac{x}{a}}=\frac{x^{n+1}-a^n\cdot x}{x-a}\cdot\frac{1}{a^n}\Rightarrow s_n=\frac{n-(n+1)a+a^{n+1}}{(1-a)^2\cdot a^n}.$$

Deoarece $|a|>1$, rezultă $\lim_{n\to\infty}s_n=\frac{a}{(1-a)^2}$ şi astfel seria este convergentă şi are suma $s=\frac{a}{(1-a)^2}$;

c) $s=\sqrt{a}-\sqrt{a+1}$;

d) $a_n = \frac{1}{a+n} - \frac{1}{a+n+1} \Rightarrow s_n = \frac{1}{a+1} - \frac{1}{a+n+1} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{a+1}$, deci seria este convergentă şi are suma $s = \frac{1}{a+1}$;

e) $s = \ln\frac{1}{2}$;

f) $s = 1$.

1.10.2 Să se însumeze seriile următoare date prin termenii generali:

a) $u_n = \varphi(n) - \varphi(n-1)$; **b)** $u_n = \frac{1}{n(n+1)\cdot\ldots\cdot(n+k)}$, $k \in \mathbb{N}$;

c) $u_n = \frac{4n}{n^4 + 2n^2 + 9}$; **d)** $u_n = \frac{n!}{(x+1)(x+2)\cdot\ldots\cdot(x+n)}$;

e) $u_n = \operatorname{arctg}\frac{1}{n^2+n+1}$; **f)** $u_n = \operatorname{arctg}\frac{2}{n^2}$;

g) $u_n = \frac{\ln(n+1) - \ln n}{\ln n \cdot \ln(n+1)}$, $n > 1$; **h)** $u_n = \frac{n^2(n+1)^2}{n!}$.

Indicaţie de rezolvare:

a) $s_n = \varphi(n) - \varphi(0)$, deci pentru $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(n) = \ell \Rightarrow s = \ell - \varphi(0)$;

b) $u_n = \frac{1}{k}\left[\frac{1}{n(n+1)\ldots(n+k-1)} - \frac{1}{(n+1)\ldots(n+k)}\right] \Rightarrow s = \frac{1}{k \cdot k!}$;

c) $n^4 + 2n^2 + 9 = \left[(n-1)^2 + 2\right]\cdot\left[(n+1)^2 + 2\right]$;

rezultă

$$u_n = \frac{an+b}{(n-1)^2+2} + \frac{cn+d}{(n+1)^2+2} = \frac{1}{(n-1)^2+2} - \frac{1}{(n+1)^2+2} \Rightarrow s = \frac{5}{6};$$

d) $s = \frac{1}{x-1}$;

e) $\operatorname{arctg}\frac{1}{n^2+n+1} = \operatorname{arctg}\frac{\frac{1}{n(n+1)}}{1+\frac{1}{n(n+1)}} = \operatorname{arctg}\frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n+1}} =$

$$= \operatorname{arctg}\frac{1}{n} - \operatorname{arctg}\frac{1}{n+1}$$

$$s_n = \text{arctg}1 - \text{arctg}\frac{1}{n+1} \Rightarrow s = \lim_{n\to\infty} s_n = \text{arctg}1 = \frac{\pi}{4};$$

f) $u_n = \text{arctg}\frac{2}{(n^2-1)+1} = \text{arctg}\frac{1}{n-1} - \text{arctg}\frac{1}{n+1} \Rightarrow s = \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{\pi}{4};$

g) $u_n = \frac{1}{\ln n} - \frac{1}{\ln(n+1)} \Rightarrow s_n = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln(n+1)} \Rightarrow s = \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{\ln 2};$

h) $s = \lim_{n\to\infty} s_n = 27 \cdot \text{e}$.

1.10.3 Folosind criteriul lui Cauchy, să se studieze natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \le 1$.

Indicație de rezolvare:

Pentru $\alpha \le 0$, se observă că $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} \ne 0$, deci seria este divergentă.

Pentru $0 < \alpha \le 1$, se aplică criteriul lui Cauchy; deci:

$$\left|a_{n+1} + ... + a_{n+p}\right| = \frac{1}{(n+1)^\alpha} + ... + \frac{1}{(n+p)^\alpha} \ge \frac{p}{(n+p)^\alpha},\ (\forall)\ p \in \mathbb{N}.$$

Luând $p = n$, se va obține

$$\left|a_{n+1} + ... + a_{n+p}\right| \ge \frac{n}{2^\alpha \cdot n^\alpha} = \frac{1}{2^\alpha} \cdot n^{1-\alpha}$$

şi cum $1-\alpha \ge 0$ rezultă că nu se verifică condiția din criteriul lui Cauchy, deci seria este divergentă.

1.10.4 Folosind criteriul lui Cauchy, să se demonstreze convergența seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}, \alpha \ge 2$.

Indicație de rezolvare:

$$\left|a_{n+1} + ... + a_{n+p}\right| = \frac{1}{(n+1)^\alpha} + ... + \frac{1}{(n+p)^\alpha} \le \frac{1}{(n+1)^2} + ... + \frac{1}{(n+p)^2} <$$

$$< \frac{1}{n(n+1)} + ... + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n},$$

deci seria este convergentă.

1.10.5 Utilizând criterii de comparaţie, să se stabilească natura următoarelor serii:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{7n}}{n^2+3n+5}$; **b)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$; **c)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{n}}$; **d)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$;

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}{n}$; **f)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\left(1+a+\ldots+a^n\right)}$, $a \geq 0$;

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n+n}$, $a \geq -1$; **h)** $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$;

i) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \sin\frac{a}{3^n}$, $0 \leq a \leq 3\pi$.

Indicaţie de rezolvare:

a) se consideră $u_n = \frac{\sqrt{7n}}{n^2+3n+5}$ şi $v_n = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$; cum $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \sqrt{7} \in (0,\infty)$, rezultă că cele două serii au aceeaşi natură şi cum seria $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ este convergentă, şi seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă;

b) $u_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{n}{n} < \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} = 2 \cdot \frac{1}{n^2} = v_n$,

iar seria $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ este convergentă, deci şi seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă;

c) divergentă;

d) convergentă;

e) $u_n = \frac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}{n} \geq \frac{1}{n} = v_n$ şi cum seria $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ este divergentă rezultă că şi seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă;

f) pentru $a=1$, seria devine $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ care este convergentă; pentru $a>1 \Rightarrow u_n \le \frac{1}{a^n}=v_n$ şi cum seria $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ este convergentă rezultă că şi seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă; pentru

$$a\in(0,1)\Rightarrow u_n=\frac{1}{n\left(\frac{1-a^{n+1}}{1-a}\right)}=\frac{1-a}{n\left(1-a^{n+1}\right)}\ge\frac{1-a}{n}=v_n$$

şi cum seria $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ este divergentă, rezultă că şi seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă; pentru $a=0$, seria este divergentă, ea fiind $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$;

g) $u_n=\frac{1}{a^n+n}\le\frac{1}{a^n}=\left(\frac{1}{a}\right)^n=v_n \Rightarrow$ pentru $a>1$ seria este convergentă; pentru $a\in(-1,1)$ se compară cu seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$; cum $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{a^n+n}=1\in(0,\infty)$ rezultă că seria va fi divergentă; pentru $a=1$, seria este divergentă, ea fiind $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$;

h) divergentă;
i) convergentă.

1.10.6 Să se stabilească natura următoarelor serii de numere pozitive:

a) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^n}$; **b)** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}\cdot a^n,\ a>0$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n^n},\ a\ge 0$; **d)** $\sum_{n=1}^{\infty}a^n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\ a\ge 0$;

e) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{(n+1)(n+a)}-n\right)^n,\ a>0$; **f)** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{n}-1\right)^n$;

g) $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}^n\left(a+\frac{\alpha}{n}\right),\ a\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$; **h)** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{an+b}{cn+d}\right)^n,\ a,\ b,\ c,\ d\in\mathbb{R}_+$;

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^p}$, $a > 0$, $p \in \mathbb{R}$;

j) $a + \sum_{n=2}^{\infty} \left(2-\sqrt{e}\right)\left(2-\sqrt[3]{e}\right)\ldots\left(2-\sqrt[n]{e}\right) \cdot a^n$, $a > 0$;

k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$; **l)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(n^3+1\right) \cdot a^n}{(n+1)!}$, $a \geq 0$;

m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$, $a \geq 0$; **n)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{\sqrt{n!}}$, $a \geq 0$; **o)** $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\ln x}$, $x > 0$;

p) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\ln(an+1)-\ln n}}$, $a > 0$; **r)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln \ln n}}$. **s)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}$;

t) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n$; **u)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+1)\ldots(a+n-1)}{n!} \cdot \frac{1}{n^{\alpha}}$, $a > 0$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$;

v) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a(a+r)\ldots(a+nr-r)}{b(b+r)\ldots(b+nr-r)}\right]^{\alpha}$, $a,\ b,\ r > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$;

w) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n)}\right]^{a}$, $a \in \mathbb{R}$.

Indicație de rezolvare:

a) convergentă;

b) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = a\mathrm{e}$, de unde rezultă că pentru $a < \frac{1}{\mathrm{e}}$ seria este convergentă, iar pentru $a > \frac{1}{\mathrm{e}}$ seria este divergentă; pentru $a = \frac{1}{\mathrm{e}}$, $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \cdot \frac{1}{\mathrm{e}^n}$;

c) convergentă;

d) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} a \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) = a$, de unde rezultă că pentru $a < 1$ seria este convergentă, pentru $a > 1$ seria este divergentă, iar pentru $a = 1$ se obține seria $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ care este divergentă;

e) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \frac{a+1}{2}$, de unde rezultă că pentru $a < 1$ seria este convergentă, pentru $a > 1$ seria este divergentă, iar pentru $a = 1$, $u_n = 1$, deci seria este divergentă;

f) convergentă;

g) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{tg}\left(a+\frac{\alpha}{n}\right)=\operatorname{tg}a$, deci pentru $a\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ seria este convergentă, pentru $a\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ seria este divergentă, iar pentru $a=\frac{\pi}{4}$, $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\mathrm{e}^{2a}\neq 0$, deci seria este divergentă;

h) pentru $a<c$ seria este convergentă, pentru $a\geq c$ este divergentă;

i) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=a$, deci pentru $a<1$ seria este convergentă, pentru $a>1$ seria este divergentă, iar pentru $a=1$ se obține seria armonică generalizată $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$, care este convergentă pentru $p>1$ şi divergentă pentru $p\leq 1$;

j) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=a$, deci pentru $a<1$ seria este convergentă, pentru $a>1$ seria este divergentă, iar pentru $a=1$ avem $\frac{u_{n+1}}{u_n}=2-\mathrm{e}^{\frac{1}{n+1}}$; deoarece $\mathrm{e}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, rezultă că $\mathrm{e}^{\frac{1}{n+1}}<1+\frac{1}{n}\Rightarrow\frac{u_{n+1}}{u_n}>1-\frac{1}{n}=\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n-1}}$ şi din criteriul III de comparație, seria este divergentă;

k) convergentă;

l) convergentă;

m) convergentă;

n) convergentă;

o) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}=-\ln x$, de unde rezultă că pentru $x<\frac{1}{\mathrm{e}}$ seria este convergentă, iar pentru $x>\frac{1}{\mathrm{e}}$ seria este divergentă; pentru $x=\frac{1}{\mathrm{e}}$, se obține seria armonică divergentă;

p) pentru $a>\mathrm{e}$ seria este convergentă, iar pentru $a<\mathrm{e}$ seria este divergentă;

r) divergentă, deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}=0$;

s) divergentă;

t) $n\left(\dfrac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n}\cdot\dfrac{\mathrm{e}-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}{\dfrac{1}{n}}$;

se consideră funcția $f:(0,\infty)\to R$, definită prin $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}-(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x}$ şi se determină limita acesteia în punctul $x=0$, se va obține:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\frac{\mathrm{e}}{2}\Rightarrow \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=\frac{1}{\mathrm{e}}\cdot\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}<1,$$

deci seria este divergentă;

u) pentru $\alpha<a$ seria este divergentă, pentru $\alpha>a$ seria este convergentă;

v) pentru $r<\alpha(b-a)$ seria este convergentă, pentru $r>\alpha(b-a)$ seria este divergentă;

w) pentru $a<2$ seria este divergentă, pentru $a>2$ seria este convergentă. Pentru $a=2$, se utilizează inegalitatea $\dfrac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n)}\geq\dfrac{1}{2\sqrt{n}}$, de unde rezultă că $\left[\dfrac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n)}\right]^2\geq\dfrac{1}{4n}$, deci seria este divergentă.

1.10.7 Să se studieze natura seriei armonice generalizate:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}},\ \alpha\in\mathbb{R}.$$

Indicație de rezolvare:

Pentru $\alpha\leq 0\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^{\alpha}}\neq 0$, deci seria este divergentă.

Pentru $\alpha>0\Rightarrow a_n=n^{-\alpha}>0$ este şir descrescător, deci seria armonică generalizată are aceeaşi natură cu seria $\sum\limits_{k=1}^{\infty}2^k\cdot\left(2^k\right)^{-\alpha}=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(2^{1-\alpha}\right)^k$, care este seria geometrică cu rația $2^{1-\alpha}$. Deci, pentru $2^{1-\alpha}\geq 1\Leftrightarrow\alpha\leq 1$ seria este divergentă, iar pentru $2^{1-\alpha}<1\Leftrightarrow\alpha>1$ seria este convergentă.

1.10.8 Să se arate că seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ cu termeni pozitivi şi monoton descrescători are aceeaşi natură cu seria $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot u_{n^2}$.

Indicație de rezolvare:

Se consideră $v_n = u_{n^2} + u_{n^2+1} + ... + u_{(n+1)^2}$. Rezultă

$$\left[(n+1)^2 - n^2 + 1\right] \cdot u_{(n+1)^2} \leq v_n \leq \left[(n+1)^2 - n^2 + 1\right] \cdot u_{n^2}$$

de unde $(n+1) \cdot u_{(n+1)^2} \leq 2(n+1) \cdot u_{(n+1)^2} \leq v_n \leq 2 \cdot n \cdot u_{n^2}$ şi din criteriul I de comparație seriile $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot u_{n^2}$ au aceeaşi natură.

1.10.9 Să se stabilească natura seriilor alternate:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+2}}$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{10^{n-1} \cdot a + 10^{n-2} \cdot a + ... + 10 \cdot a + a}{10^n}$, $a > 0$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{2n+1}{3^n}$;

d) $\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} + ...$

Indicație de rezolvare:

a) şirul cu termenul general $u_n = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+2}}$ este un şir descrescător, deoarece $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^{n+2} < 1$, $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = 0$, deci conform criteriului lui Leibniz, seria este convergentă;

b) $\lim_{n\to\infty} u_n = a \cdot \frac{10^n - 1}{9 \cdot 10^n} = \frac{a}{9} \neq 0$, deci seria este divergentă;

c) convergentă;

d) $u_n = (-1)^{n+1} \cdot \dfrac{2}{n}$, şir descrescător şi convergent la zero, deci seria este convergentă.

1.10.10 Să se studieze convergenţa absolută şi semiconvergenţa seriilor cu termenii oarecare:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{3^n}$, $x \in \mathbb{R}$; **b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin n^2$; **c)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$, $x \in \mathbb{R}$;

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{(n+a)^{\alpha}}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-$;

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{1-a^n}$, $a \neq \pm 1$; **f)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{1+a^{2n}}$, $a \in \mathbb{R}$;

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n\left(n+\sqrt{3}\right)}$ unde $(a_n)_n$ este un şir mărginit;

h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{2^n \cdot \sin^{2n} x}{n+1}$, $x \in \mathbb{R}$; **i)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$;

j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a-1)\cdot \ldots \cdot (a-n+1)}{n!}$, $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$.

Indicaţie de rezolvare:

a) $|u_n| \leq \dfrac{1}{3^n}$ şi utilizând criteriul I de comparaţie, seria este absolut convergentă;

b) divergentă;

c) absolut convergentă;

d) pentru $\alpha > 1$ seria este absolut convergentă, pentru $\alpha \leq 0$ seria este divergentă, deoarece nu se verifică condiţia necesară de convergenţă a unei serii, iar pentru $\alpha \in (0,1]$, seria este semiconvergentă, utilizând criteriul lui Leibniz;

e) pentru $|a| < 1$ seria este absolut convergentă, iar pentru $|a| > 1$ seria este divergentă, deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$;

f) pentru $a = \pm 1$ seria este divergentă, deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, iar pentru $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$ seria este absolut convergentă;

g) seria este absolut convergentă, deoarece $u_n = \dfrac{|a_n|}{n\left(n+\sqrt{3}\right)} \leq \dfrac{M}{n^2}$;

h) se utilizează criteriul raportului pentru seria modulelor şi obţinem că pentru $x \in \left(k\pi - \frac{\pi}{4}, k\pi + \frac{\pi}{4}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$, seria este convergentă şi pentru $x \in \left(k\pi + \frac{\pi}{4}, k\pi + \frac{3\pi}{4}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$, este divergentă; pentru $x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ se obţine seria convergentă $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n+1}$;

i) semiconvergentă;

j) pentru seria modulelor se aplică Raabe-Duhamel şi obţinem că pentru $a \geq 0$ seria este absolut convergentă, iar pentru $a < 0$ seria modulelor este divergentă.

Pentru $a < 0$ avem

$$\frac{a(a-1)\cdot\ldots\cdot(a-n+1)}{n!} = (-1)^n \cdot \frac{(-a)(1-a)\cdot\ldots\cdot(n-a-1)}{n!} \overset{\text{not}}{=} (-1)^n \cdot b_n,$$

unde $b_n > 0,\ (\forall)\ n \in \mathbb{N}$. Am obţinut seria alternată $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot b_n$, pentru care $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{n-a}{n+1} \geq 1$, pentru $a \leq -1$; deci, în acest caz şirul $(b_n)_n$ este crescător şi limita este nenulă, deci seria este divergentă.

Pentru $a \in (-1, 0)$ şirul $(b_n)_n$ este descrescător şi se demonstrează că are limita zero.

Pentru aceasta, fie $b_n = \frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}{n}$, $b_{n-1} = \frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1}}{n-1}$.

Rezultă că $u_n = n \cdot b_n - (n-1) \cdot b_{n-1}$ şi înlocuind pe b_n şi pe b_{n-1} vom obţine $u_n = (-a) \cdot b_{n-1},\ (\forall)\ n \in \mathbb{N}$. Cum şirul $(b_n)_n$ este descrescător şi mărginit inferior, el este convergent, deci şirul $(u_n)_n$ este convergent.

Fie $\ell = \lim_{n\to\infty} b_n$, $\ell_1 = \lim_{n\to\infty} u_n$ şi trecând la limită în cele două relaţii de recurenţă obţinute anterior, rezultă că $\ell = 0$. Utilizând criteriul Leibniz, seria $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot b_n$ este convergentă.

1.10.11 Să se arate că:

a) suma dintre o serie convergentă şi una divergentă este o serie divergentă;

b) există serii divergente a căror sumă este o serie convergentă.

Indicație de rezolvare:

a) fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o serie convergentă şi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ o serie divergentă; dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ ar fi convergentă, atunci diferența dintre aceasta şi seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ar fi o serie convergentă, dar diferența este seria $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, care este o serie divergentă; rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ este divergentă;

b) seriile $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ sunt divergente, dar suma lor este seria cu suma egală cu zero, deci este o serie convergentă.

1.10.12 Să se efectueze produsul seriilor absolut convergente $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ şi $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n!}$ şi să se deducă de aici suma seriei $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n!}$.

Indicație de rezolvare:

Seria valorilor absolute este $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ pentru ambele serii. Pentru aceasta, şirul sumelor parțiale este $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}$ convergent către e, de unde rezultă că ambele serii sunt absolut convergente. Din Teorema lui Cauchy seria produs $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ este absolut convergentă şi suma ei verifică $C = A \cdot B$.

Dar $c_n = \frac{1}{n!} \cdot (1-1)^n = 0 \Rightarrow C = 0$. Cum $A = e \Rightarrow B = 0$.

Deci, $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n!}$=0.

1.10.13 Se dau şirurile $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ definite prin formulele de recurență:

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2},\ b_{n+1} = \frac{2 \cdot a_n \cdot b_n}{a_n + b_n},\ n \in \mathbb{N},\ a_0 = a > b = b_0 > 0.$$

a) Să se demonstreze că cele două şiruri sunt convergente şi că au aceeaşi limită ℓ.

b) Să se studieze natura seriei $\sum_{n=0}^{\infty} (\ell - b_n)$.

Indicaţie de rezolvare:

a) se demonstrează că şirul $(a_n)_n$ este monoton descrescător de termeni pozitivi, iar $(b_n)_n$ este monoton crescător, prin inducţie matematică; notând $\ell_1 = \lim_{n\to\infty} a_n$ şi $\ell_2 = \lim_{n\to\infty} b_n$ şi trecând la limită în relaţiile de recurenţă, rezultă că $\ell_1 = \ell_2 = \ell$;

b) seria numerică $\sum_{n=0}^{\infty} (\ell - b_n)$ este cu termenii pozitivi şi aplicându-se criteriul raportului, rezultă că este convergentă.

1.10.14 Fie $(\lambda_n)_n$ un şir de elemente din $[0,1]$ şi $(x_n)_n$ un şir definit prin $x_1 = b,\ x_n = \lambda_n \cdot a + (1 - \lambda_n) \cdot x_{n-1},\ (\forall)\ n \geq 2$, unde $a,\ b \in \mathbb{R}$ sunt fixate, astfel încât $a < b$.

a) Să se demonstreze că şirul $(x_n)_n$ este convergent.

b) Dacă şirul $(\lambda_n)_n$ este monoton crescător, să se studieze natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty} (a - x_n)$.

Indicaţie de rezolvare:

b) fie $x = \lim_{n\to\infty} x_n,\ \lambda = \lim_{n\to\infty} \lambda_n \Rightarrow x = \lambda \cdot a + (1 - \lambda) \cdot x \Rightarrow x = a$;

dacă termenul general al seriei este $u_n = a - x_n$, din criteriul raportului, rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a - x_{n+1}}{a - x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a - \left[\lambda_{n+1} \cdot a + (1 - \lambda_{n+1}) \cdot x_n\right]}{a - x_n} = 1 - \lambda < 1\ ,$$

deci seria este convergentă.

1.10.15 Să se studieze natura seriilor complexe:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta + \mathrm{i} \cdot \sin n\theta}{n^2}$, $\theta \in [0, 2\pi]$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta p + \mathrm{i} \cdot \sin n\theta p}{n}$, $\theta \neq \frac{2k\pi}{p}$, $k = 0, 1, \ldots, p-1$.

Indicație de rezolvare:

a) seriile de numere reale $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n^2}$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n^2}$ sunt absolut convergente, de unde rezultă şi convergența seriei complexe;

b) pentru seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta p}{n}$ se aplică criteriul Dirichlet, considerându-se şirul $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ descrescător la zero şi seria $\sum_{n=1}^{\infty} \cos n\theta p$ având şirul sumelor parțiale mărginit. Rezultă seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta p}{n}$ convergentă. Similar se arată convergența seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta p}{n}$, deci seria de numere complexe va fi convergentă.

TEST DE AUTOEVALUARE

1 Să se stabilească natura seriilor cu termenii oarecare:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \cdot \cos n^2}{n}$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n},\ x \in \mathbb{R}$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right) \cdot \frac{\sin nx}{n}$;

d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{\ln\left(2+e^{3n}\right)}{\ln\left(3+e^{2n}\right)}$;

e) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{\sqrt[n]{n}}{\ln n}$;

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln n \cdot \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \cdot \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$;

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{\alpha+\frac{1}{n}}},\ \alpha \in \mathbb{R}$.

2 Să se demonstreze că seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ este absolut convergentă, pentru orice x real. Dacă $s(x)$ este suma seriei, să se stabilească relația $s(x+y) = s(x) \cdot s(y),\ (\forall)\ x, y \in \mathbb{R}$.

TEMĂ DE CONTROL

1 Să se arate că şirul cu termenul general $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n$ este convergent.

2 Să se studieze convergenţa şirurilor definite prin:

a) $x_n > 0,\ x_{n+1} \le \frac{x_n}{1 + x_n},\ (\forall)\ n \ge 0,\ x_0 = 1$;

b) $x_n + x_{n+1} > 0,\ (\forall)\ n \in \mathbb{N},\ x_{n+1}^2 < x_n^2,\ (\forall)\ n \in \mathbb{N}$;

c) $0 < x_n < 2,\ (2 - x_n) \cdot x_{n+1} > 1,\ (\forall)\ n \in \mathbb{N}$.

3 Să se arate că şirul definit prin termenul general $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n}$ este convergent şi să i se calculeze limita.

4 Să se calculeze $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\sin \frac{\pi}{n+1} + \ldots + \sin \frac{\pi}{2n} \right)$.

5 Să se calculeze limitele şirurilor următoare din $\mathbb{R}^2$:

a) $\left(\sqrt[n]{\ln n}, \left(\sqrt[n+1]{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!} \right) \right)_{n \in \mathbb{N}}$;

b) $\left(\frac{1}{n} \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} \sin \frac{k\pi}{n}, \frac{1}{n} \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} \cos \frac{k\pi}{n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$.

6 Să se demonstreze convergenţa şirului cu termenul general: $x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n+1},\quad n \ge 1$ şi să se arate că limita sa aparţine intervalului $(-2, -1)$.

7 Ştiind că $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, să se calculeze $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \cdot (n+1)^2}$.

8 Să se studieze convergența seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n)}\right]^{p}\cdot\frac{1}{n^{q}}$, ştiind că $\frac{1}{2\sqrt{n}}\leq\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n)}\leq\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

9 Fie şirul definit prin $\begin{cases}a_1=\sqrt{\alpha}\\ a_n=\sqrt{\alpha+a_{n-1}},\ \alpha>0,\ n\geq 2\end{cases}$.

a) Să se demonstreze că şirul $(a_n)_n$ este convergent şi să se calculeze $\ell=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

b) Să se studieze natura seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\ell-a_n)$.

10 **a)** Să se studieze convergența şirului $(x_n)_n$ cu $x_0>0$ şi definit prin $x_{n+1}=\frac{2\cdot a\cdot x_n}{a+x_n}$, $a\in□$, $a>0$.

b) Să se studieze convergența seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_n-a)$.

11 Să se studieze natura seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n},\frac{1}{n}\right)$ din $□^{2}$.

12 Să se calculeze sumele următoarelor serii de numere complexe:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{n(n+1)(n+2)}+\mathrm{i}\cdot\frac{1}{n(n+1)}\right)$;

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-1}{3^{n}}+\mathrm{i}\cdot\frac{n\cdot 2^{n}}{(n+2)!}\right)$.

BIBLIOGRAFIE RECOMANDATĂ PENTRU MODULUL 1

1. **D. M. Bătinețu-Giurgiu, M. Bătinețu, V. Gârban**, *Analiză matematică, Exerciții şi probleme*, Editura Militară, Bucureşti, 1992
2. **I. Colojoară**, *Analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983
3. **M. Craiu, V. V. Tănase**, *Analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1980
4. **M. Craiu, M. Roşculeț**, *Culegere de probleme de analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1976
5. **N. Donciu, D. Flondor**, *Algebră şi analiză matematică*. Culegere de probleme, vol. I, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1978
6. **I. P. Elianu**, *Principii de analiză matematică*. Calcul diferențial, Editura Academiei Militare, Bucureşti, 1976
7. **P. Flondor, O. Stănăşilă**, *Lecții de analiză matematică*, Editura ALL, 1993
8. **M. Nicolescu, N. Dinculeanu, S. Marcus**, *Manual de Analiză matematică*, vol. I, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1966
9. **E. Popescu**, *Analiză matematică. Structuri fundamentale*, Editura Academiei Tehnice Militare, Bucureşti, 1998
10. **M. Roşculeț**, *Analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1973
11. **M. Roşculeț**, *Culegere de probleme de analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1968
12. **I. Sprințu**, *Elemente de analiză matematică*, Editura Academiei Tehnice Militare, Bucureşti, 2001
13. **O. Stănăşilă**, *Analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981

MODULUL 10

FORMULE INTEGRALE

9.1 BREVIAR TEORETIC

Formulele integrale sunt formule de legătură între integralele multiple, integralele curbilinii şi integralele de suprafaţă fiind aplicaţii particulare ale relaţiei $\int_{\partial X} \omega = \int_{X} \alpha d\omega$, unde ω este o formă diferenţială, $d\omega$ este diferenţiala sa exterioară, iar X este un domeniu cu bord regulat, orientabil, orientările lui X şi ∂X fiind asociate.

Definiţia 9.1.

(i) Fie în spaţiul euclidian real $\mathbb{R}^2$ triunghiul T_1 cu vârfurile în punctele $A_0(0,0)$; $A_1(1,0)$; $A_2(0,1)$. Vom spune că triunghiul T_1 este orientat pozitiv dacă se consideră pe mulţimea vârfurilor sale relaţia de ordine $A_0 < A_1 < A_2$.

(ii) Un triunghi oarecare $M_1(a_1,b_1)$, $M_2(a_2,b_2)$, $M_3(a_3,b_3)$ este orientat pozitiv dacă şi numai dacă

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix} > 0.$$

(iii) Un domeniu poligonal D a cărui frontieră este imaginea unei curbe simple şi închise este orientat pozitiv dacă orice triunghi format din mulţimea vârfurilor domeniului este orientat pozitiv.

(iv) Fie D un domeniu compact din $\mathbb{R}^2$ a cărui frontieră este imaginea unei curbe simple şi închise. Vom spune că D este orientat pozitiv dacă frontiera lui D este orientată pozitiv (orice linie poligonală formată din puncte ale frontierei este pozitiv orientată).

Observaţia 9.2. Fie D un domeniu compact în spaţiul euclidian $\mathbb{R}^2$ a cărui frontieră ∂D este imaginea unei curbe simple şi incluse. Fie A un punct arbitrar pe ∂D. Notăm $C(A)$ curba simpla şi închisă care are proprietatea că orientează pozitiv domeniul D având ca imagine ∂D.

Fie $P, Q : D \to \mathbb{R}$ două funcţii astfel încât integrala curbilinie $\int_{\partial D} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$ există. Atunci pentru orice $A \in \partial D$

integrala $\int_{C(A)} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$ există şi nu depinde de A. Vom nota $\oint\limits_{\partial D} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$ valoarea comună a acestor integrale.

Propoziția 9.3 (Formula lui Green-Riemann).

Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu compact având ca frontieră o curbă simplă, închisă rectificabilă.

Fie $P,Q: D \to \mathbb{R}$ două funcții continue pe *D* care admit derivatele parțiale $\frac{\partial P}{\partial y}$ şi $\frac{\partial Q}{\partial x}$ continue pe *D*.

În aceste condiții integralele următoare există şi are loc relația

$$\oint_{\partial D} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y .$$

Observația 9.4.

Fie *D* un domeniu compact având ca frontieră o curbă simplă închisă şi rectificabilă. Atunci are loc egalitatea

$$\mathrm{aria} D = \frac{1}{2} \oint\limits_{\partial D} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x .$$

Observația 9.5.

Fie $S \subset \mathbb{R}^3$ o suprafață netedă deschisă definită de $x = f(u,v)$; $y = g(u,v)$; $z = h(u,v)$ $(u,v) \in D$ mărginită de o curbă închisă, netedă $C = \partial S$, funcțiile f, g, h fiind funcție de clasă C^2 pe $D \subset \mathbb{R}^2$.

Vom alege pentru normala suprafeței *S* acea orientare care determină parcurgerea frontierei ∂S în sens direct şi vom numi această față, fața superioară a lui *S*.

Propoziția 9.6 (Formula lui Stokes).

Fie

$$S \subset \mathbb{R}^3$$

$$S = \left\{ (x,y,z) \middle| x = f(u,v), y = g(u,v), z = h(u,v),\ (u,v) \in D,\ f,g,h \in \mathrm{C}^2(D) \right\}$$

o suprafață orientată, netedă, deschisă mărginită de o curbă închisă *C*.

Fie $D \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu care conține suprafața *S* şi $P,Q,R: D \to \mathbb{R}$ trei funcții continue care admit derivate parțiale de ordinul I continue pe *D*.

Atunci are loc egalitatea

$$\oint_C P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z =$$

$$= \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Observația 9.7. Formula lui Green se obține din formula lui Stokes dacă C şi S sunt în $\mathbb{R}^2$ (dacă $z = 0,\ \mathrm{d}z = 0$).

Propoziție 9.8 (Formula lui Gauss-Ostrogradski).

Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un volum mărginit de o suprafață $S = \partial\Omega$ închisă, netedă orientată după normala exterioară a corpului Ω. Dacă volumul Ω este simplu în raport cu toate planele de coordonate şi dacă funcțiile $P, Q, R : \Omega \cup S \to \mathbb{R}$ sunt continue şi admit derivate parțiale continue pe Ω, atunci are loc egalitatea

$$\iint_{S=\partial\Omega} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$= \iiint_\Omega \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Observații 9.9.

(i) Dacă se consideră câmpul vectorial $\vec{F}(x,y,z)$ de componente (P,Q,R) definit într-un domeniu $V \subset \mathbb{R}^3$ prin

$$\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k},$$

dacă funcțiile $P, Q, R : V \to \mathbb{R}$ sunt continue şi dacă $\overline{n}$ este versorul normalei la suprafața $S \subset V$, $\overline{n} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k}$, atunci fluxul vectorului $\overline{F}$ prin suprafața orientată S va fi

$$\phi = \iint_S \vec{F} \cdot \overline{n}\mathrm{d}\sigma = \iint_S P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(ii) Dacă $\overline{F}$ este un câmp vectorial de componente P, Q, R de clasă C^1 pe $V \subset \mathbb{R}^3$, atunci se numeşte rotorul lui $\overline{F}$ vectorul

$$\mathrm{rot}\,\overline{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

Atunci formula lui Stokes devine

$$\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\overline{r} = \iint_S \overline{n} \cdot \mathrm{rot}\,\overline{F} \cdot \mathrm{d}\sigma,$$

adică circulația vectorului câmp de-a lungul unei curbe închise este egală cu fluxul rotorului său prin orice suprafața S ce se sprijină pe această curbă închisă.

(iii) Numim divergența câmpului vectorial

$$\vec{F} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$$

şi notăm

$$\operatorname{div}\overline{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Cu această definiție formula lui Gauss Ostrogradski devine

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div}\overline{F}\,\mathrm{d}v = \iint_{S} \overline{F}\cdot\overline{n}\cdot \mathrm{d}\sigma,$$

adică integrala triplă a divergenței unui câmp vectorial continuu diferențial pe compactul simplu Ω este egală cu fluxul câmpului prin suprafața frontieră a domeniului.

9.2 PROBLEME REZOLVATE

1 Fie $\Gamma = \left\{(x,y)\middle| x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3},\ a > 0\right\}$. Se poate aplica formula lui Green pentru calculul integralei curbilinii

$$\int_{\Gamma} -\frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x + \frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{d}y?$$

Rezolvare. Fie D domeniul mărginit de curba Γ. Funcțiile

$$P(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2},\ \ Q(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

nu sunt definite în punctul $(0,0) \in D$.

Să se calculeze următoarele integrale curbilinii, folosind formula lui Green:

2 $I = \int_{\Gamma}\left(x^3 - 3xy^2\right)\mathrm{d}x + \left(3x^2y - y^3\right)\mathrm{d}y,$

unde Γ este frontiera domeniului

$$D = \left\{(x,y)\middle| x^2 + y^2 \le R^2,\ x \ge 0,\ y \ge 0\right\},$$

parcursă în sens pozitiv.

Rezolvare. Fie $P,Q:D\to\mathbb{R}$, $P(x,y)=x^3-3xy^2$, $Q(x,y)=3x^2y-y^3$. Se observă că $P,Q\in C^1(D)$, iar

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-6xy,\ \frac{\partial Q}{\partial x}=6xy.$$

$$I=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=12\iint_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$

$$=12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^R\rho^3\mathrm{d}\rho=\frac{3R^4}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta\mathrm{d}\theta=$$

$$=\frac{3R^4}{2}\left(-\frac{\cos 2\theta}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3R^4}{2}.$$

3 $I=\int_\Gamma(xy+x+y)\mathrm{d}x+(xy+x-y)\mathrm{d}y,$

unde Γ este frontiera domeniului

$$D=\left\{(x,y)\middle|\left(x-\frac{a}{2}\right)+y^2=\frac{a^2}{4},\ a>0\right\},$$

parcursă în sens pozitiv.

Rezolvare. Fie $P,Q:D\to\mathbb{R}$, $P(x,y)=xy+x+y;\ Q(x,y)=xy+x-y$.

$$P,Q\in C^1(D)$$

şi

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=y+1,\frac{\partial P}{\partial y}=x+1$$

$$I=\iint_D(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{a}{2}}\mathrm{d}\rho\int_0^{2\pi}\left(\rho\sin\theta-\frac{a}{2}-\rho\cos\theta\right)\rho\mathrm{d}\theta=$$

$$=\frac{\rho^3}{3}\Bigg|_0^{\frac{a}{2}}(-\cos\theta)\Bigg|_0^{2\pi}-\frac{a}{2}\cdot2\pi\cdot\frac{\rho^2}{2}\Bigg|_0^{\frac{a}{2}}-\frac{\rho^3}{3}\Bigg|_0^{\frac{a}{2}}\sin\theta\Bigg|_0^{2\pi}=-\frac{a^3\pi}{8}.$$

Folosind formula Gauss-Ostrogradski, să se calculeze integralele de suprafață de tipul al doilea:

4 $I = \iint\limits_S 4x\mathrm{d}y\mathrm{d}z - 2y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

unde S este fața exterioară a domeniului

$$V = \left\{ (x, y, z) \middle| x^2 + y^2 \le 4, z \in [0,3] \right\}.$$

Rezolvare. Fie $P, Q, R : V \to \mathbb{R}$,

$$P(x, y, z) = 4x,\ Q(x, y, z) = -2y^2,\ R(x, y, z) = z^2.$$

Observăm că $P, Q, R \in \mathrm{C}^1(V)$ şi că

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 4 - 4y + 2z.$$

Deci:

$$I = \iiint\limits_V (4 - 4y + 2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint\limits_D \left(\int_0^3 (4 - 4y + 2z)\mathrm{d}z \right) \cdot \mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$= \iint\limits_D \left(4z - 4yz + z^2\right)\Big|_{z=0}^{z=3} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_D (12 - 12y + 9)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

unde

$$D = \left\{ (x, y) \middle| x^2 + y^2 \le 4 \right\}.$$

Avem

$$I = 21\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y - 12\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^2 \rho^2 \sin\theta \mathrm{d}\rho = 21 \cdot 4\pi - 0 = 84\pi.$$

5 $I = \iint\limits_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

unde S este fața exterioară a cubului

$$0 \le x \le a,\ 0 \le y \le a,\ 0 \le z \le a,\ a > 0.$$

Rezolvare. Fie $V = \left\{ (x, y, z) \middle| 0 \le x \le a,\ 0 \le y \le a,\ 0 \le z \le a \right\}$

$$I=2\iiint_V (x+y+z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=2\int_0^a \mathrm{d}x\int_0^a \mathrm{d}y\int_0^a (x+y+z)\,\mathrm{d}z=$$

$$=\int_0^a \mathrm{d}x\int_0^a \left(2ax+2ay+a^2\right)\mathrm{d}y=\int_0^a \left(2a^3x+a^2x^2\right)\mathrm{d}x=3a^4.$$

6 $I=\iint_S x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$

unde S este fața exterioară a sferei

$$x^2+y^2+z^2=R^2.$$

Rezolvare. $I=\iiint_V 3\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$

unde $V=\left\{(x,y,z)\middle|x^2+y^2+z^2\le R^2\right\}$.

Trecând la coordonate sferice, avem

$$I=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R \rho^2\cdot\rho^2\sin\theta\,\mathrm{d}\rho=6\pi\cdot(-\cos\theta)\Big|_0^{\pi}\cdot\frac{\rho^5}{5}\Big|_0^R=\frac{12\pi R^5}{5}.$$

7 Să se calculeze fluxul câmpului vectorial

$$F(x,y,z)=\left(2xz,-yz,x^2+y^2\right)$$

prin fața exterioară S a primului octant:

$$x^2+y^2+z^2\le R^2,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0.$$

Rezolvare. Fie $V=\left\{(x,y,z)\middle|x^2+y^2+z^2\le R^2,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0\right\}$.

Fluxul câmpului vectorial F este dat de integrala $\Phi=\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}\sigma$, unde S este compusă din suprafața sferică a octantului şi trei suprafețe plane, iar n este normala exterioară la fiecare suprafață

$$\Phi=\iiint_V \operatorname{div}F\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_V (2z-z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_V z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Trecem la coordonate sferice $x=\rho\sin\theta\cos\varphi$, $y=\rho\sin\theta\sin\varphi$, $z=\rho\cos\theta$ cu $\rho\in[0,R]$, $\varphi\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $J=\rho^2\sin\theta$. Avem

$$\Phi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)(\sin\theta)\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{R}\rho^3\mathrm{d}\rho=$$

$$=\frac{R^4}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta=\frac{\pi R^4}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta=\frac{\pi R^4}{16}.$$

Folosind formula lui Stokes, să se calculeze:

8 $I=\int_\Gamma x\left(y^2+z^2\right)\mathrm{d}x+y\left(z^2+x^2\right)\mathrm{d}y+z\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}z$,

unde Γ este curba dată de ecuațiile

$$x^2+y^2+z^2=R^2,\ x+y+z=0.$$

Rezolvare.

$$I=\iint_{S_e}(2yz-2yz)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(2zx-2xz)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(2xy-2xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,$$

S_e este fața exterioară a suprafeței mărginită de curba Γ.

9 $I=\int_\Gamma x^2y^3\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\mathrm{d}z$, unde $\Gamma=\left\{(x,y,z)\middle|x^2+y^2=R^2,z=0\right\}$.

Rezolvare. $I=\iint_{S_e}-3x^2y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, unde S_e reprezintă o suprafață mărginită de curba Γ, $z=f(x,y)$, $(x,y)\in D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le R^2\right\}$. Atunci

$$A=-\frac{\partial f}{\partial x},\ B=-\frac{\partial f}{\partial y},\ C=1.$$

Rezultă:

$$I=-3\iint_D x^2\cdot y^2\cdot C\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-3\iint_D x^2y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-3\int_0^R\rho^5\mathrm{d}\rho\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\sin^2\theta\mathrm{d}\theta=$$

$$=-3\int_0^R\rho^5\mathrm{d}\rho\left[\frac{\theta}{8}-\frac{\sin 4\theta}{32}\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi}=-\frac{3\pi}{4}\int_0^R\rho^5\mathrm{d}\rho=-\frac{\pi R^6}{8}.$$

10 $I=\int_\Gamma(z-y)\mathrm{d}x+(x-z)\mathrm{d}y+(y-x)\mathrm{d}z$, unde conturul poligonal închis $\Gamma=\overline{\mathrm{ABCA}}$ are vârfurile

$$A(1,0,0),\ B(0,1,0),\ C(0,0,1).$$

Rezolvare. Ecuația planului (ABC) este

$$x+y+z-1=0.$$

Normala la planul (ABC) este $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Atunci

$$I=2\iint\limits_{\Delta ABC} dydz+dzdx+dxdy=2\iint\limits_{\Delta OAB} 3dxdy=3.$$

11 Să se calculeze integrala curbilinie

$$\int_{\overset{\frown}{AMO}}\left(e^x\sin y-my\right)dx+\left(e^x\cos y-m\right)dy,$$

unde $\overset{\frown}{AMO}$ este semicercul superior $x^2+y^2=ax$ parcurs de la $A(a,0)$ la $O(0,0)$.

Rezolvare. Fie

$$P(x,y)=e^x\sin y-my;$$
$$Q(x,y)=e^x\cos y-m.$$

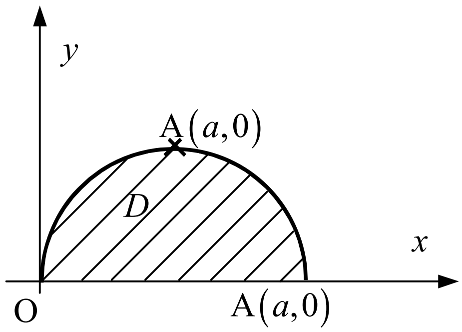


Fig. 9.1

$P,Q:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ sunt funcții diferențiabile. Funcțiile $\frac{\partial P}{\partial y},\frac{\partial Q}{\partial x}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$.

$\frac{\partial P}{\partial y}=\cos y-m$ şi, respectiv, $\frac{\partial Q}{\partial x}=e^x\cos y$ sunt şi ele funcții continue. Considerăm curba determinată de reuniunea dintre arcul $\overset{\frown}{AMO}$ şi segmentul $\overline{OA}$ şi aplicăm formula lui Green pe acest contur închis

$$\int\limits_{\overset{\frown}{\mathrm{AMO}}\cup\overline{\mathrm{OA}}}\left(\mathrm{e}^x\sin y-my\right)\mathrm{d}x+\left(\mathrm{e}^x\cos y-m\right)\mathrm{d}y=$$

$$=\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D m\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

unde $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,x^2+y^2\le ax;\ y\ge 0\right\}$.

Trecând la coordonate polare, integrala devine:

$$\iint\limits_D m\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int\limits_0^{a\cos\theta}m\rho\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{m}{2}\left(a^2\cos^2\theta\right)\mathrm{d}\theta=$$

$$=\frac{ma^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{ma^2\pi}{8}.$$

Deci:

$$\int\limits_{\overset{\frown}{\mathrm{AMO}}}\left(\mathrm{e}^x\sin y-my\right)\mathrm{d}x+\left(\mathrm{e}^x\cos y-m\right)\mathrm{d}y+$$

$$+\int_{\overline{\mathrm{OA}}}\left(\mathrm{e}^x\sin y-my\right)\mathrm{d}x+\left(\mathrm{e}^x\cos y-m\right)\mathrm{d}y=\frac{ma^2\pi}{8}.$$

O parametrizare pentru OA este $\begin{cases}x=t,\\ y=0,\end{cases}\quad t\in[0,a]$ şi

$$\int_{\overline{\mathrm{OA}}}\left(\mathrm{e}^x\sin y-my\right)\mathrm{d}x+\left(\mathrm{e}^x\cos y-m\right)\mathrm{d}y=\int_0^a 0\,\mathrm{d}t=0.$$

Rezultă deci că

$$\int\limits_{\overset{\frown}{\mathrm{AMO}}}\left(\mathrm{e}^x\sin y-my\right)\mathrm{d}x+\left(\mathrm{e}^x\cos y-m\right)\mathrm{d}y=\frac{ma^2\pi}{8}.$$

12 Să se calculeze

$$\int\limits_C\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x+y\left[xy+\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\right]\mathrm{d}y,$$

unde C este curba $C:\begin{cases}x=2+2\cos\theta;\\ z=2+2\sin\theta,\end{cases}\quad\theta\in[0,2\pi].$

Rezolvare. Curba C este cercul centrat în $(2,2)$ şi de raza 2 deci este o curbă închisă.

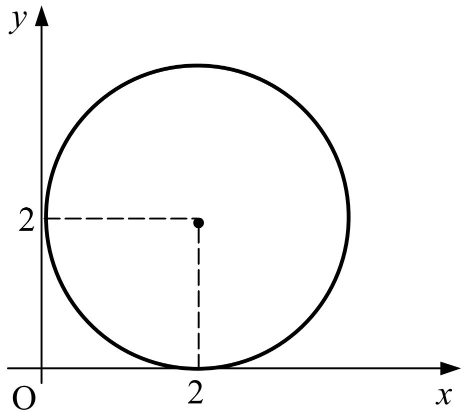


Fig. 9.2

Fie $D=\left\{(x,y)\middle|(x-y)^2+(y-2)^2\le 4\right\}$;

$$P,Q:D\to\mathbb{R}\,;\,P(x,y)=\sqrt{x^2+y^2},$$

$$Q(x,y)=xy^2+y\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right).$$

Deoarece $(0,0)\notin D$, P,Q sunt funcții continue şi cu derivate parțiale continue. Fiind satisfăcute ipotezele formulei Green rezultă

$$\int_C\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x+y\left[xy+\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}y\right]=\iint\limits_D y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^2[2+\rho\sin\theta]^2\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^2\left[4\rho+4\rho^2\sin\theta+\rho^3\sin^2\theta\right]\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=20\pi.$$

13 Să se calculeze în două moduri integrala

$$\oint_{x^2+y^2=1}\mathrm{e}^{x^2+y^2}(-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y).$$

Rezolvare. Prin calcul direct, o parametrizare a curbei C este

$$\begin{cases}x=\cos\theta;\\ y=\sin\theta,\end{cases}\quad \theta\in[0,2\pi].$$

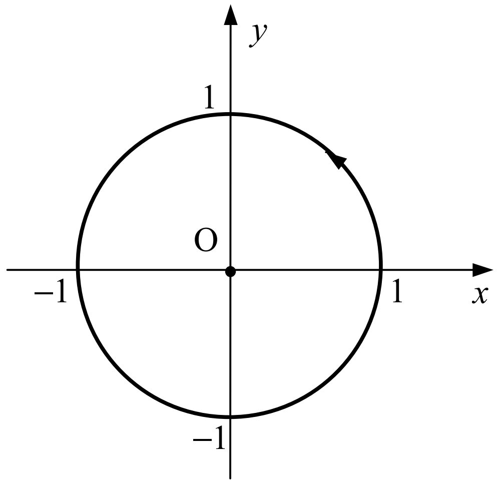


Fig. 9.3

Integrala devine atunci

$$\oint_{x^2+y^2=1} \mathrm{e}^{x^2+y^2}\left(-y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y\right) = \int_0^{2\pi} \mathrm{e}\left(\sin^2\theta + \cos^2\theta\right)\mathrm{d}\theta = 2\pi\mathrm{e}.$$

Deoarece curba C este o curbă închisă şi funcţiile sunt continue, cu derivate parţiale continue pe $D = \left\{(x,y)\middle| x^2 + y^2 \le 1\right\}$ se poate aplica formula lui Green:

$$\oint_{x^2+y^2=1} \mathrm{e}^{x^2+y^2}\left(-y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y\right) = \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} \mathrm{e}^{x^2+y^2}\left(2 + 2x^2 + 2y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$= 2\int_0^{2\pi}\int_0^1 \mathrm{e}^{\rho^2}\left(1+\rho^2\right)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta = (\mathrm{e}-1)2\pi + 2\pi = 2\pi\mathrm{e}.$$

14 Să se calculeze integrala

$$\oint_C (y-z)\mathrm{d}x + (z-x)\mathrm{d}y + (x-y)\mathrm{d}z,$$

dacă C este elipsa

$$C: \begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, & a > 0 \\ \dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{h} = 1, & h > 0 \end{cases}$$

parcursă în sens trigonometric dacă privim din partea pozitivă a axei $\mathrm{O}x$.

Rezolvare.

Elipsa considerată este un contur simplu, închis, ce mărgineşte suprafaţa

$$D = \left\{(x,y,z)\middle| \frac{x}{a} + \frac{z}{h} = 1,\ x^2 + y^2 \le a^2\right\}.$$

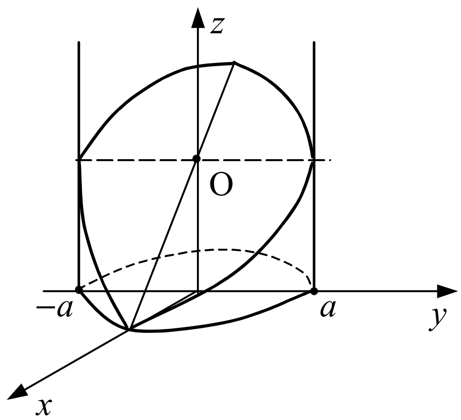


Fig. 9.4

Funcțiile

$$P(x,y,z)=y-z;\ Q(x,y,z)=z-x;\ R(x,y,z)=x-y$$

sunt funcții continue care admit derivate parțiale continue. Atunci aplicând formula lui Stokes, obținem

$$\oint_C (y-z)\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z=$$

$$=\iint_D -2\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2\mathrm{d}z\mathrm{d}x-2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$

$$=-2\iint_{x^2+y^2\le a^2}\left(+\frac{h}{a}+0+1\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-2(h+a)\pi a.$$

15 Să se calculeze integrala:

$$\oint_C \left(y^2-z^2\right)\mathrm{d}x+\left(z^2-x^2\right)\mathrm{d}y+\left(x^2-y^2\right)\mathrm{d}z,$$

unde C este secțiunea cubului $0<x<a,\ 0<y<0,\ 0<z<0$ cu planul $x+y+z=\frac{3}{2}a$ parcursă în sens trigonometric, dacă privim din partea pozitivă a axei $\mathrm{O}x$.

Rezolvare. Curba MNPQRS obținută prin intersecția cubului cu planul este un hexagon regulat de latură $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Funcțiile

$$P(x,y,z)=y^2-z^2$$

$$Q(x,y,z)=z^2-x^2$$

$$R(x,y,z)=x^2-y^2$$

sunt funcții continue ce admit derivate parțiale continue pe $\mathbb{R}^3$. Aplicând formula lui Stokes, vom obține

$$\oint_C \left(y^2-z^2\right)\mathrm{d}x+\left(z^2-x^2\right)\mathrm{d}y+\left(x^2-y^2\right)\mathrm{d}z=$$

$$=\iint_{\mathrm{MNPQRS}} \left(-2y-2z\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(-2z-2x\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(-2x-2y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

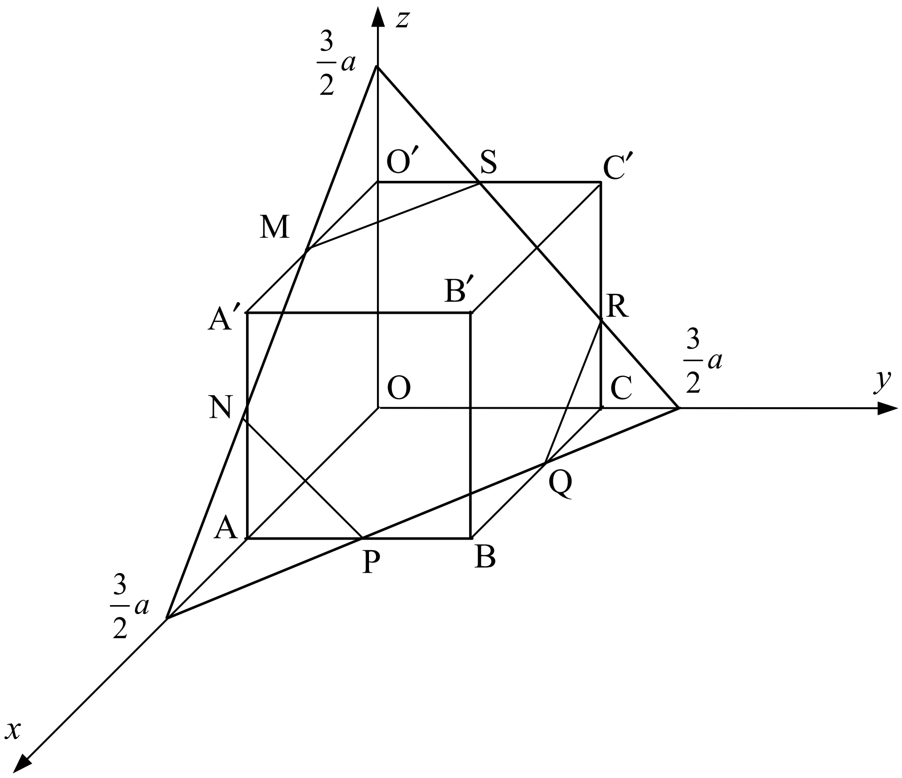


Fig. 9.5

Hexagonul MNPQRS fiind inclus în planul

$$x+y+z=\frac{3}{2}a$$

obținem

$$\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \oint_C \left(y^2-z^2\right)\mathrm{d}x+\left(z^2-x^2\right)\mathrm{d}y+\left(x^2-y^2\right)\mathrm{d}z=$$

$$=-4\iint_{\mathrm{VAPQCT}}\left(x+y+\frac{3}{2}a-x-y\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-6a\iint_{\mathrm{VAPQCT}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{9}{2}a^3.$$

16 Să se calculeze integrala

$$\oint_C x\mathrm{d}x + (x+y)\mathrm{d}y + (x+y+z)\mathrm{d}z,$$

dacă C este curba

$$C:\begin{cases} x = a\sin t, \\ y = a\cos t, \\ z = a(\sin t + \cos t), \end{cases} \qquad t\in[0,2\pi].$$

Rezolvare. Curba C este elipsa obținută prin intersecția cilindrului $x^2+y^2=a^2$ cu planul $z=x+y$ și este o curbă simplă închisă care mărginește domeniul D pe planul $z=x+y$.

Funcțiile $P(x,y,z)=x,\ Q(x,y,z)=x+y$ și $R(x,y,z)=x+y+z$ fiind continue și cu derivate parțiale continue putem aplica formula lui Stokes și vom obține:

$$\oint_C x\mathrm{d}x + (x+y)\mathrm{d}y + (x+y+z)\mathrm{d}z =$$

$$= \iint_D +\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \mathrm{d}z\mathrm{d}x + \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint_{x^2+y^2\le a^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\pi a^2.$$

17 Să se calculeze

$$\iint_S y^2\cdot z\mathrm{d}x\mathrm{d}y + xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z + x^2 y\mathrm{d}z\mathrm{d}x,$$

dacă S este suprafața exterioară a corpului din primul octant limitat de suprafețele $z=x^2+y^2;\ x^2+y^2=1$ și planele de coordonate.

Rezolvare. Suprafața paraboloidului $z=x^2+y^2$ și cea a cilindrului se întâlnesc în $z=1$ și deoarece funcțiile $P(x,y,z);\ Q(x,y,z)$ și $R(x,y,z)$ sunt continue și cu derivate parțiale continue se poate aplica formula Gauss-Ostrogradski și vom obține:

$$\iint_{\partial\Omega=S} y^2 z\mathrm{d}x\mathrm{d}y + xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z + x^2 y\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \iiint_\Omega \left(y^2+z+x^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z =$$

$$= \iint_{\substack{x^2+y^2\le 1\\ x,y>0}} \left(\int_0^{x^2+y^2} \left(x^2+y^2+z\right)\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$= \iint_{\substack{x^2+y^2\le 1\\ x,y>0}} \left(x^2+y^2\right)^2 + \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{3}{2}\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^1 \rho^3\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\theta = \frac{3\pi}{16}.$$

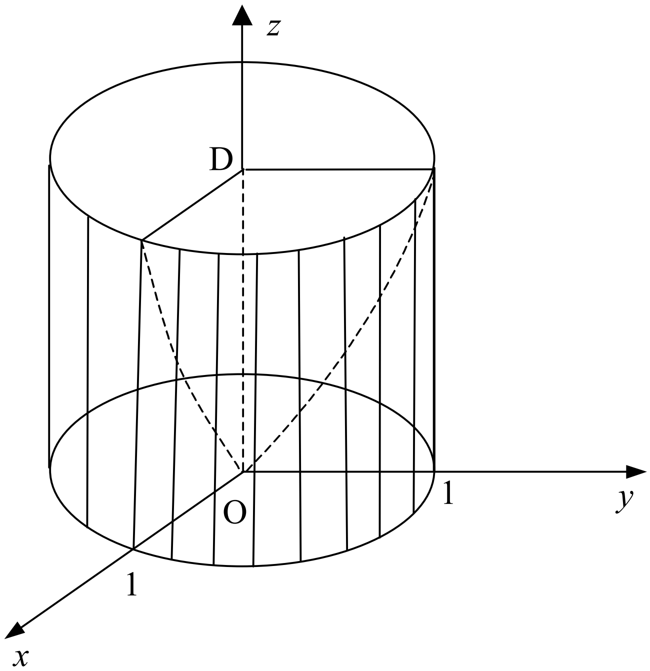


Fig. 9.6

18 Să se calculeze fluxul vectorului de poziție $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ prin suprafața conului $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$, $z \geq 0$.

Rezolvare. Fluxul vectorului $\vec{a}$ prin suprafața considerată va fi

$$\phi = \iint_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

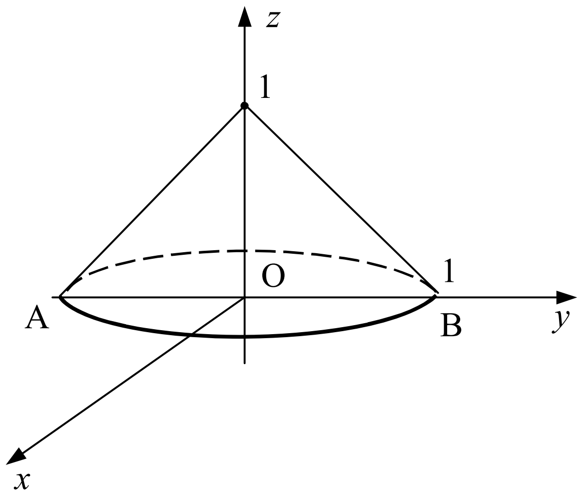


Fig. 9.7

Vom închide suprafaţa conului cu discul din planul xOy $\left(x^2+y^2\le 1\right)$ şi vom aplica formula lui Gauss-Ostrogradski, deoarece ipotezele acesteia sunt îndeplinite

$$\iint_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\le 1\\ z=0}} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}(1+1+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Dar $\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\le 1\\ z=0}} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$ şi deci

$$\phi=3\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=3\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\left(\int\limits_0^{1-\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$

$$=3\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3\int_0^{2\pi}\int_0^1(1-\rho)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=\pi.$$

19 Să se calculeze fluxul vectorului $\overline{a}=x^2\overline{i}+y^2\overline{j}+z^2\overline{k}$ prin octantul pozitiv al sferei $x^2+y^2+z^2=1$ $\left(x>0,\ y>0,\ z>0\right)$.

Rezolvare. Deoarece suprafaţa considerată este deschisă, o vom închide adăugând planele de coordonate $x=0,\ y=0,\ z=0$. Fluxul vectorului $\overline{a}$ prin suprafaţa considerată va fi:

$$\phi=\iint\limits_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Observăm că

$$\iint\limits_{\substack{z=0\\ x^2+y^2\le 1,x,y>0}} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$

$$=\iint\limits_{\substack{x=0\\ x^2+y^2\le 1,y,z>0}} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$

$$=\iint\limits_{\substack{y=0\\ x^2+y^2\le 1,x,z>0}} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

Deoarece $P(x,y,z)=x^2$, $Q(x,y,z)=y^2$ şi $R(x,y,z)=z^2$ sunt funcţii de clasă C^1 pe $\mathbb{R}^3$, suntem în condiţiile formulei Gauss-Ostrogradski şi

$$\phi=\iiint\limits_{\Omega}(2x+2y+2z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

unde $\Omega=\left\{(x,y,z)\middle| x^2+y^2+z^2\le 1,\ x,y,z\ge 0\right\}$.

Trecând la coordonate sferice $\Omega:\begin{cases} x=\rho\sin\theta\cos\varphi, & \rho\in[0,1];\\ y=\rho\sin\theta\sin\varphi, & \theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right];\\ z=\rho\cos\theta, & \varphi\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\end{cases}$

Jacobianul transformării este $J=\rho^2\sin\theta$. Obţinem:

$$\phi=2\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^1(\rho\sin\theta\cos\varphi+\rho\sin\theta\sin\varphi+\rho\cos\theta)\cdot\rho^2\sin\theta\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\left(\sin^2\theta\cos\varphi+\sin^2\theta\sin\varphi+\sin\theta\cos\theta\right)\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\left(\sin^2\theta+\sin^2\theta+\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\theta\right)\mathrm{d}\theta=\frac{3\pi}{8}.$$

20 Să se calculeze integrala

$$\iint_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dacă S este suprafaţa exterioară a conului

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=0,\ z\in[0,b],\ a,b>0.$$

Rezolvare. Deoarece suprafaţa S este o suprafaţă deschisă, o vom închide considerând discul $D=\left\{(x,y,z)\middle|\ z=b,\ x^2+y^2\le a^2\right\}$

$$\iint_D x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2} b^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi a^2b^2.$$

Deoarece funcţiile $P(x,y,z)=x^2$, $Q(x,y,z)=y^2$ şi $R(x,y,z)=z^2$ sunt funcţii de clasă C^1 pe $\mathbb{R}^3$ şi suprafaţa $S\cup D$ este o suprafaţă închisă, putem aplica formula Gauss-Ostrogradski şi vom obţine:

$$\iint_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \pi a^2b^2 = \iiint\limits_{\Omega}(2x+2y+2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z =$$

$$=2\iint\limits_{x^2+y^2\le a}\left(\int_{\frac{b}{a}\sqrt{x^2+y^2}}^{b}(x+y+z)\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$=2\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}(x+y)b\left(1-\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a}\right)+\frac{b^2}{2}\left(1-\frac{x^2+y^2}{a^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$=2\int_0^{2\pi}\int_0^a b\rho^2\left(1-\frac{\rho}{a}\right)(\cos\theta+\sin\theta)+\frac{b^2\rho}{2}-\frac{b^2\rho^3}{2a^2}\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=\frac{\pi b^2a^2}{2}.$$

Deci, $\iint_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\frac{\pi a^2b^2}{2}$.

21 Fie forma diferențială ω de grad 1 şi clasă C^∞ pe $\mathbb{R}^2$

$$\omega(x,y)=(x+y)^2\,\mathrm{d}x-(x-y)^2\,\mathrm{d}y$$

şi curbele C_1 şi C_2 având următoarele reprezentări parametrice

$$C_1=\begin{cases}x=t^2;\\ y=t,\end{cases}\ t\in[0,1];\quad C_2=\begin{cases}x=t;\\ y=t^2,\end{cases}\ t\in[0,1].$$

Să se calculeze diferența integralelor

$$I_1=\int_{C_1}\omega \text{ şi } I_2=\int_{C_2}\omega$$

în două moduri:

(i) prin calcul direct;

(ii) cu ajutorul formulei Green.

Rezolvare.

(i) Folosind teorema de reducere a integralei curbilinie la o integrală Riemann deducem:

$$I_1-I_2=\int_0^1\left[\left(t^2+t\right)^2 2t-\left(t^2-t\right)^2\right]\mathrm{d}t-\int_0^1\left[\left(t^2+t\right)^2-\left(t^2-t\right)^2 2t\right]\mathrm{d}t=\frac{3}{5}.$$

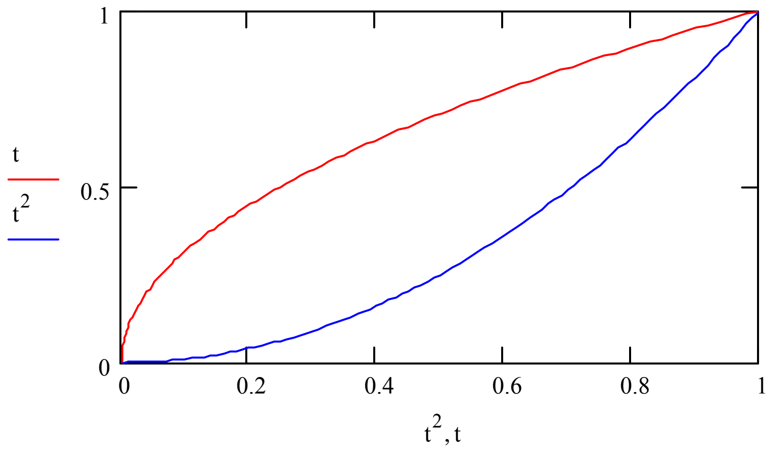


Fig. 9.8

(ii) Cum curba $\Gamma = C_1^- \cup C_2$ este simplă, închisă şi rectificabilă. În plus, determină orientarea pozitivă a domeniului.

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 \le y \le \sqrt{x},\ x \in [0,1] \right\}.$$

Cum funcţiile $P(x,y) = (x+y)^2$ şi $Q(x,y) = -(x-y)^2$ sunt polinomiale ele au derivate parţiale continue pe Ω, iar:

$$I_1 - I_2 = \int_{C_1} \omega - \int_{C_2} \omega = -\int_{C_1^-} \omega - \int_{C_2} \omega = -\int_{C_1^- \cup C_2 = \Gamma} \omega.$$

Folosind formula lui Green deducem:

$$I_1 - I_2 = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 4 \iint_{\Omega} x \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Din teorema Fubini deducem:

$$I_1 - I_2 = 4 \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} x \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \frac{3}{5}.$$

22 Cu ajutorul integralei curbilinii să se calculeze ariile următoarelor domenii:

(i) $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \left(x^2 + y^2\right)^2 \le a^2 \left(x^2 - y^2\right), x \ge 0 \right\},\ a > 0;$

(ii) D mărginit de imaginea curbei

$$C: \begin{cases} x = 3\cos t - \cos 3t; \\ y = 2\sin t - \sin 2t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi].$$

Rezolvare.

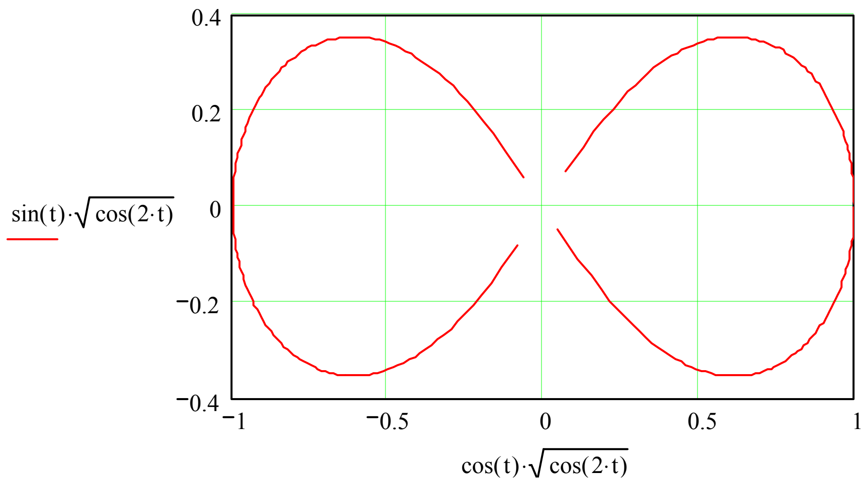


Fig. 9.9

(i) O reprezentare parametrică a frontierei domeniului D este:

$$\Gamma = \partial D : \begin{cases} x = a\cos\theta\sqrt{\cos 2\theta}; \\ y = a\sin\theta\sqrt{\cos 2\theta}, \end{cases} \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right].$$

Această curbă este simplă, închisă şi rectificabilă. În plus, determină orientarea pozitivă a domeniului D.

Aplicând formula de exprimare a ariei unui domeniu (Green) cu ajutorul unei integrale curbilinii, obţinem:

$$\text{aria } D = \frac{1}{2}\int_{\Gamma} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x.$$

Folosind teorema de reducere la o integrală Riemann deducem:

$$\text{aria } D = \frac{a^2}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\left(\cos\theta\cdot\sqrt{\cos 2\theta}\cdot\frac{\cos 3\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}} + \sin\theta\sqrt{\cos 2\theta}\frac{\sin 3\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}\right)\mathrm{d}\theta =$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos 2\theta \mathrm{d}\theta = \frac{a^2}{2}.$$

(ii) Curba C este simplă, închisă şi rectificabilă.

În plus, determină orientarea pozitivă a domeniului D.

Aplicând formula de exprimarea a ariei unui domeniu cu ajutorul unei integrale curbilinii, obţinem:

$$\text{aria } D = \frac{1}{2}\int_C x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[(3\cos t - \cos 3t)\cdot(2\cos t - 2\cos 2t) - (2\sin t - \sin 2t)(3\sin 3t - 3\sin t)\right]\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(12 - 24\cos^2 t + 4\cos^3 t + 16\cos^4 t - 8\cos^5 t\right)\mathrm{d}t = 6\pi.$$

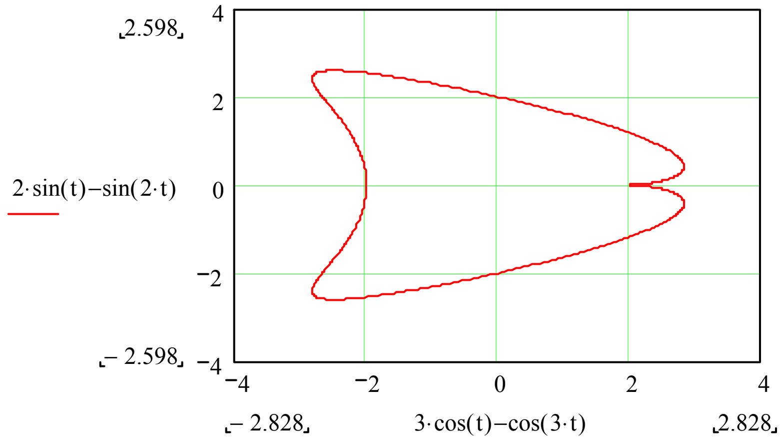


Fig. 9.10

23 Folosind formula Stokes să se calculeze integrala curbilinie

$$I = \int_\Gamma y^2\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}y + x^2\mathrm{d}z\,,$$

unde Γ este curba definită prin intersecția paraboloidului de revoluție $y^2 + z^2 = 4x$ cu cilindrul $x^2 + y^2 = x,\ z \geq 0$.

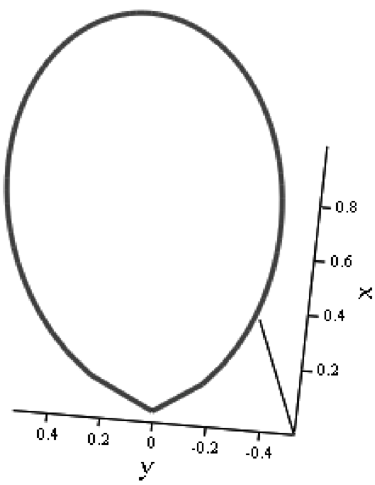


Fig. 9.11

Rezolvare. O reprezentare parametrică a paraboloidului de revoluție $y^2+z^2=4x \quad (z\geq 0)$ este:

$$S:\begin{cases} x=\dfrac{1}{4}\rho^2, & \rho\geq 0,\\ y=\rho\sin\theta, & \theta\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right],\\ z=\rho\cos\theta. \end{cases}$$

Porțiunea din paraboloid care se află în interiorul cilindrului respectă condiția:

$$\rho\leq\sqrt{1-4\cdot\sin^2\theta},\ \theta\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right].$$

Cum $P(x,y,z)=y^2$, $Q(x,y,z)=z^2$ și $R(x,y,z)=x^2$ au derivate parțiale continue, iar suprafața este cu plan tangent continuu pe porțiuni, prin aplicarea teoremei Stokes obținem:

$$I=-2\iint_S(z\cos\alpha+x\cos\beta+y\cos\gamma)\partial\sigma.$$

Matricea derivatelor este:

$$M=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial\theta} & \dfrac{\partial y}{\partial\theta} & \dfrac{\partial z}{\partial\theta}\\ \dfrac{\partial x}{\partial\rho} & \dfrac{\partial y}{\partial\rho} & \dfrac{\partial z}{\partial\rho}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & \rho\cos\theta & -\rho\sin\theta\\ \dfrac{\rho}{2a} & \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix},$$

iar coeficienții primei forme diferențiale sunt

$$A=\rho,\ B=-\frac{1}{2}\sin\theta,\ C=-\frac{1}{2}\cos\theta.$$

Prin teorema de transformare a integralei de suprafață într-o integrală dublă, alegând normala exterioară la suprafață, obținem:

$$I=2\iint_\Omega\left[z(\rho,\theta)A(\rho,\theta)+x(\rho,\theta)B(\rho,\theta)+y(\rho,\theta)C(\rho,\theta)\right]\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta,$$

unde domeniul

$$\Omega=\left\{(\rho,\theta)\in\mathbb{R}\ \middle|\ 0\leq\rho\leq 4\sqrt{\frac{1}{4}-\sin^2\theta},\theta\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]\right\}.$$

După prelucrări algebrice simple, folosind teorema Fubini se obține succesiv:

$$I=2\iint_{\Omega}\left(\rho^2\cos\theta-\frac{1}{8}\rho^2\sin\theta-\frac{1}{2}\rho\sin\theta\cos\theta\right)\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=$$

$$=2\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\left(\int_0^{4\sqrt{\frac{1}{4}-\sin^2\theta}}\left(\rho^2\cos\theta-\frac{1}{8}\rho^2\sin\theta-\frac{1}{2}\rho\sin\theta\cos\theta\right)\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\theta=$$

$$=\frac{2}{3}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\left(4\cos^2-3\right)\left(8\cos\theta\sqrt{4\cos^2\theta-3}-\sin\theta\sqrt{4\cos^2\theta-3}-3\sin\theta\cos\theta\right)\mathrm{d}\theta=\pi.$$

24 Să se calculeze circulația vectorului

$$\overline{v}=\left(y^2+z^2\right)\overline{i}+\left(z^2+x^2\right)\overline{j}+\left(y^2+x^2\right)\overline{k}$$

de-a lungul curbei Γ definită de reprezentarea parametrică

$$\Gamma:\begin{cases}x=r\left(1+\cos t\right),\\ y=r\sin t, \\ z=\sqrt{2r\left(a-r\right)\left(1+\cos t\right)},\end{cases}\qquad t\in\left[0,2\pi\right],\ 2r>a>r>0.$$

Rezolvare. Prin eliminarea parametrului t se determină două suprafețe a căror intersecție este curba Γ.

Imaginea curbei Γ se află la intersecția sferei

$$x^2+y^2+z^2=a^2$$

cu cilindrul $x^2+y^2=2rx,\ z\geq 0$.

Din teorema Stokes deducem:

$$\mathsf{C}\left(\overline{v},\Gamma\right)=\int_{\Gamma}\left(y^2+z^2\right)\mathrm{d}x+\left(z^2+x^2\right)\mathrm{d}y+\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}z=$$

$$=\iint_S 2\left[\left(y+z\right)\cos\alpha+\left(z+x\right)\cos\beta+\left(x+y\right)\cos\gamma\right]\mathrm{d}\sigma.$$

Prin teorema de reducere a unei integrale de suprafață la o integrală dublă deducem:

$$\mathsf{C}\left(\overline{v},\Gamma\right)=2\iint_{\Omega}\left[\left(y+z\right)A+\left(z+x\right)B+\left(x+y\right)C\right]\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi,$$

unde pentru suprafața S am folosit reprezentarea parametrică

$$S:\begin{cases} x = a\cos\theta\sin\varphi, & \theta\in[-\pi,\pi]; \\ y = a\sin\theta\sin\varphi, & \varphi\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]; \\ z = a\cos\varphi, \end{cases}$$

matricea derivatelor fiind

$$M=\begin{pmatrix} a\cos\theta\cos\varphi & a\sin\theta\cos\phi & -a\sin\varphi \\ -a\sin\theta\sin\varphi & a\cos\theta\sin\varphi & 0 \end{pmatrix}$$

coeficienții primei forme diferențiale (alegând sensul normalei exterioare) sunt:

$$A=a^2\cos\theta\sin^2\varphi,\ B=a^2\sin\theta\sin^2\varphi,\ C=a^2\sin\varphi\cos\varphi,$$

iar domeniul Ω este definit prin:

$$\Omega=\left\{(\varphi,\theta)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, \varphi\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\ \theta\in\left[-\arccos\frac{a}{2r},\arccos\frac{a}{2r}\right]\right\}.$$

În final, prin teorema Fubini, deducem că $C(\overline{v},\Gamma)$ este egală cu

$$2\int_{-\arccos\frac{a}{2r}}^{\arccos\frac{a}{2r}}\left[\int_0^{\pi/2}\left(2a^3\sin^2\varphi(\cos\theta\sin\theta\sin\varphi+\cos\theta\cos\varphi+\sin\theta\sin\varphi)\right)\mathrm{d}\varphi\right]\mathrm{d}\theta=$$

$$=2\int_{-\arccos\frac{a}{2r}}^{\arccos\frac{a}{2r}}\frac{2}{3}a^3(\cos\theta+\sin\theta+\sin2\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{4}{3}a^3\sqrt{\frac{4r^2-a^2}{r^2}}.$$

25 Cu ajutorul teoremei Stokes să se calculeze integrala

$$I=\iint_S\left[(z\cos\alpha+x\cos\beta+y\cos\gamma)\right]\mathrm{d}\sigma,$$

unde S este jumătatea superioară a sferei

$$x^2+y^2+z^2=R^2,\ R>0,$$

iar α,β,γ sunt unghiurile făcute de normala exterioară la sferă cu axele de coordonate.

Rezolvare. Vom căuta un câmp vectorial

$$\overline{v}=P(x,y,z)\overline{i}+Q(x,y,z)\overline{j}+R(x,y,z)\overline{k}$$

diferențiabil astfel încât

$$\operatorname{rot}\overline{v} = z\overline{i} + x\overline{j} + y\overline{k} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial R}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial z} = z; \\ \dfrac{\partial P}{\partial z} - \dfrac{\partial R}{\partial x} = x; \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = y. \end{cases} \qquad \textbf{(9.1)}$$

Determinând o soluție a sistemului (**9.1**) de forma $P(x,y,z) = xz$, $Q(x,y,z) = xy - \frac{z^2}{2}$ şi $R(x,y,z) = 0$, deducem

$$I = \int_{\Gamma} xz\mathrm{d}x + \left(xy - \frac{z}{2}\right)^2 \mathrm{d}y,$$

unde Γ este cercul $\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2; \\ z = 0. \end{cases}$

Din cele de mai sus deducem:

$$I = \int_{\Gamma} xy\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} R^3 \cos^2\theta \sin\theta \mathrm{d}\theta = 0,$$

unde pentru Γ am folosit reprezentare parametrică

$$\Gamma : \begin{cases} x = R\cos\theta; \\ y = R\sin\theta, \end{cases} \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

26 Să se determine circulația vectorului

$$\overline{v} = y\overline{i} - 2z\overline{j} + x\overline{k}$$

de-a lungul elipsei definite ca fiind intersecția hiperboloidului $2x^2 - y^2 + z^2 = R^2$, $R > 0$, cu planul $y = x$. Să se verifice rezultatul cu ajutorul teoremei Stokes.

Rezolvare.

(i) Ecuația parametrică a elipsei este:

$$\Gamma : \begin{cases} x = R \cdot \cos\theta, \\ y = R \cdot \cos\theta, \\ z = R \cdot \sin\theta, \end{cases} \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Prin urmare:

$$\mathcal{C}(\overline{v},\Gamma)=\int_{\Gamma}\overline{v}\mathrm{d}\overline{r}=\int_{\Gamma} y\mathrm{d}x-2z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z=$$

$$=R^2\int_0^{2\pi}\left(-\sin\theta\cos\theta+2\sin^2\theta+\cos^2\theta\right)\mathrm{d}\theta=3\pi R^2.$$

(ii) Verificarea cu ajutorul teoremei Stokes

Deoarece $\operatorname{rot}\overline{v}=2\overline{i}-\overline{j}-\overline{k}$, deducem

$$\mathcal{C}(\overline{v},\Gamma)=\iint_S \operatorname{rot}\overline{v}\cdot\overline{n}\,\mathrm{d}\sigma.$$

Cum suprafața S ce are ca bordură Γ este porțiunea din planul $y=x$ aflată în interiorul hiperboloidului $2x^2-y^2+z^2=R^2$ deducem

$$\overline{v}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\overline{i}-\overline{j}\right)$$

şi

$$\mathcal{C}(\overline{v},\Gamma)=\iint_S\frac{3}{\sqrt{2}}\mathrm{d}\sigma=\frac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{aria}S.$$

Dar cum elipsa Γ are semiaxele $a=R\sqrt{2}$ şi $b=R$ deducem

$$\mathcal{C}(\overline{v},\Gamma)=\frac{3}{\sqrt{2}}\pi ab=3\pi R^2.$$

27 Folosind teorema Gauss-Ostrogradski să se determine fluxul câmpului vectorial

$$\overline{v}=x^3\overline{i}+y^3\overline{j}+zR^2\overline{k}$$

prin suprafața domeniului

$$\Omega=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,\middle|\,\frac{h}{R^2}\left(x^2+y^2\right)\le z\le h\right\};\ \ R,h\in\mathbb{R}_+^*$$

în direcția normalei exterioare.

Rezolvare. Cum

$$\operatorname{div}\overline{v}=3\left(x^2+y^2\right)+R^2$$

deducem:

$$\phi(\overline{v},\partial\Omega)=\iint_{\partial\Omega}\overline{v}\cdot\overline{n}\,\mathrm{d}\sigma=\iiint_{\Omega}\left[3\left(x^2+y^2\right)+R^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Folosind coordonatele cilindrice

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta, & \theta \in [0, 2\pi] \\ y = \rho\sin\theta, & \rho \in [0, R] \\ z = z, & z \in \left[\dfrac{h\rho^2}{R^2}, h\right] \end{cases} \qquad \text{iar} \qquad \frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \theta, z)} = \rho$$

deducem:

$$\phi(\overline{v}, \partial\Omega) = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^R\left(\int_{\frac{h\rho^2}{R^2}}^h\left(3\rho^2 + R^2\right)\rho \mathrm{d}z\right)\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\theta =$$

$$= 2\pi\int_0^R\left(3r^2 + R^2\right)\left(h - \frac{h\rho^2}{R^2}\right)\cdot\rho \mathrm{d}\rho = \pi h R^4.$$

28 Să se calculeze integrala

$$I = \iint\limits_S y^2 z \mathrm{d}x\mathrm{d}y + z^2 x \mathrm{d}y\mathrm{d}z + x^2 y \mathrm{d}z\mathrm{d}x,$$

unde S este bordura domeniului

$$\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 0 \le z \le x^2 + y^2 \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0\right\}.$$

Rezolvare.

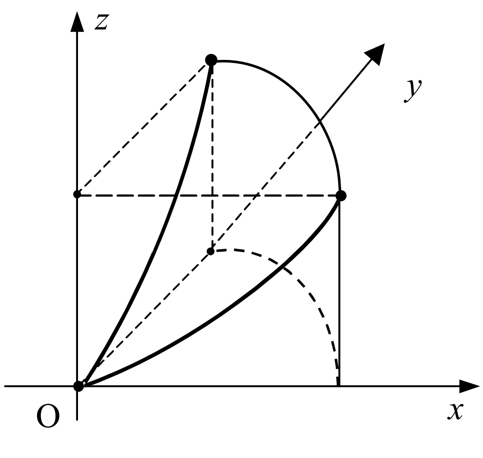


Fig. 9.12

Integrala se mai poate scrie şi sub forma

$$I=\iint_S \left(y^2 z\cos\gamma + xz^2\cos\alpha + x^2 y\cos\beta\right)\mathrm{d}\sigma$$

şi folosind formula Gauss-Ostrogradski se obţine

$$I=\iiint_\Omega \left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\ .$$

Folosind coordonatele cilindrice se obţine:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, & \theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right] \\ y = r\sin\theta, & r\in[0,1] \\ z = z, & z\in[0,r] \end{cases} \qquad \text{iar} \qquad \frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,z)} = r$$

$$\Gamma=\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^1\left(\int_0^r\left(r^2+z^2\right)r\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{2}\int_0^1\left(r^4+\frac{r^4}{3}\right)\mathrm{d}r=\frac{2\pi}{15}.$$

29 Se dă câmpul vectorial $\overline{v}=x\cdot f(xy)\overline{i}+y\cdot f(xy)\overline{j}+z\overline{k}$, unde $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ este de clasă $C^1\left(\mathbb{R}^2\right)$ şi $f(1)=-\frac{1}{2}$.

(i) Să se determine funcţia f astfel încât fluxul lui $\overline{v}$ prin orice suprafaţă S închisă, cu plan tangent continuu pe porţiuni, să fie nul.

(ii) Să se determine fluxul lui $\overline{v}$ prin suprafaţa S a conului $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=0$ aflată între planele $z=0$ şi $z=b$.

Rezolvare.

(i) Condiţia din problemă este echivalentă cu $\operatorname{div}\overline{v}=0$ pe $\mathbb{R}^3$, adică:

$$2f(xy)+xyf'(xy)+1=0,\ \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

Notând cu $u=xy$, se obţine ecuaţia diferenţială

$$2uf'(u)+2f(u)+1=0,$$

care are soluţia generală:

$$f(u)=-\frac{1}{2}+\frac{C}{u},\ C\in\mathbb{R},\ u\neq 0.$$

Cum f este diferenţiabil pe $\mathbb{R}^2\Rightarrow C=0$ şi $f(xy)=-\frac{1}{2}$, iar câmpul vectorial $\overline{v}$ este

$$\overline{v} = -\frac{1}{2}x\overline{i} - \frac{1}{2}y\overline{j} + z\overline{k}\ .$$

(ii) $\phi(\overline{v}, S) = \iint\limits_S \left(-\frac{1}{2}x\cos\alpha - \frac{1}{2}y\cos\beta + z\cos\gamma \right) \mathrm{d}\sigma.$

Completăm suprafața S cu planul $\pi : z = b$, obținând o suprafață închisă $\Sigma = S \cup \pi$. Întrucât fluxul lui $\overline{v}$ prin suprafața Σ este nul, deducem:

$$\phi(\overline{v}, S) = -\phi(\overline{v}, \pi) = -\iint\limits_\pi \left(-\frac{1}{2}x\cos\alpha - \frac{1}{2}y\cos\beta + z\cos\gamma \right) \mathrm{d}\sigma\ ,$$

unde α, β, γ sunt unghiurile formate de normala exterioară la planul π cu axele de coordonate $\left(\alpha = \frac{\pi}{2},\ \beta = \frac{\pi}{2},\ \gamma = 0 \right)$.

Deducem:

$$\phi(\overline{v}, S) = -\iint\limits_\pi z\,\mathrm{d}\sigma = -b \iint\limits_{x^2+y^2 \le a^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -b\pi a^2\ .$$

30 Stabiliți identitatea (formula lui Green)

$$\iiint\limits_\Omega (v\Delta u - u\Delta v)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint\limits_{\partial\Omega = S} \left(v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\overline{n}} - u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\overline{n}} \right) \mathrm{d}\sigma,$$

unde u şi v sunt funcții continue cu derivate de ordinul doi continue în domeniul Ω.

Rezolvare. În formula lui Gauss-Ostrogradski

$$\iiint\limits_\Omega \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint\limits_{S = \partial\Omega} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,\mathrm{d}\sigma$$

punem:

$$\begin{cases} P = v \cdot u'_x - u \cdot v'_x \\ Q = v \cdot u'_y - u \cdot v'_y \\ R = v \cdot u'_z - u \cdot v'_z \end{cases}$$

atunci:

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = v\left(u''_{xx} + u''_{yy} + u''_{zz}\right) - u\left(v''_{xx} + v''_{yy} + v''_{zz}\right) = v\Delta u - u\Delta v, \quad \textbf{(9.2)}$$

iar

$$P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma = v\left(u'_x\cos\alpha + u'_y\cos\beta + u'_z\cos\gamma\right) -$$
$$-u\left(v'_x\cos\alpha + v'_y\cos\beta + v'_z\cos\gamma\right) = v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\overline{n}} - u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\overline{n}}. \qquad \textbf{(9.3)}$$

Reunind (**9.2**) şi (**9.3**) în combinație cu formula Gauss-Ostragradski se obține rezultatul dorit.

9.3 TEMĂ DE CONTROL

Folosind formula lui Green, să se calculeze:

1. $\int\limits_{\Gamma} -x^2 y\mathrm{d}x + xy^2\mathrm{d}y$,

unde Γ este cercul $x^2 + y^2 = R^2$ parcurs în sens pozitiv.

Răspuns. $\frac{\pi R^4}{2}$.

2. $I = \int\limits_{\Gamma} xy\mathrm{d}x + \left(x^2 - y^2\right)\mathrm{d}y$,

unde Γ este conturul ΔOAB de vârfuri $\mathrm{O}(0,0)$, $\mathrm{A}(2,1)$, $\mathrm{B}(1,2)$ parcurs în sens pozitiv.

Răspuns. $\frac{3}{2}$.

3. $I = \int\limits_{\Gamma} \left(3x^2 - 8y^2\right)\mathrm{d}x + (4x - 6xy)\mathrm{d}y$,

unde Γ este frontiera domeniului

$$D = \left\{(x,y) \middle| x + y \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0\right\}.$$

Răspuns. $\frac{5}{3}$.

4. Să se calculeze aria domeniului plan mărginit de astroida $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, $a > 0$.

Indicație. O reprezentare parametrică a astroidei este:

$$\begin{cases} x = a\cos^2 t; \\ y = a\sin^3 t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi];$$

Răspuns. $\dfrac{3\pi a^2}{8}$.

Să se calculeze integralele de suprafață, utilizând formula Gauss-Ostrogradski:

5. $\iint\limits_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

unde S este față exterioară a domeniului din $\mathbb{R}^3$, delimitat de planele $x+y+z=a,\ x=0,\ y=0,\ z=0$.

Răspuns. $\dfrac{a^3}{2}$.

6. $I = \iint\limits_S x\left(y^2 - z^2\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\left(z^2 - x^2\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\left(x^2 - y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

unde S este fața exterioară a sferei $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Răspuns. 0.

7. $I = \iint\limits_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x - 2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

unde S este forța exterioară a domeniului din $\mathbb{R}^3$ mărginit de planele $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x=1,\ y=1,\ z=1$.

Răspuns. 0.

Să se calculeze integralele următoare, aplicând formula lui Stokes:

8. $\int\limits_{\overset{\frown}{\mathrm{ABCA}}} y^2\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}y + x^2\mathrm{d}z$, unde $\overset{\frown}{\mathrm{ABCA}}$ este conturul poligonal determinat de punctele $\mathrm{A}(a,0,0),\ \mathrm{B}(0,a,0),\ \mathrm{C}(0,0,a)$.

Răspuns. $-a^3$.

9. $\int\limits_\Gamma (2x - z)\mathrm{d}x + (y - z + 1)\mathrm{d}y + z^2\mathrm{d}z$,

unde Γ mărginește suprafața

$$S = \left\{(x,y,z)\middle| x^2 + y^2 = z^2,\ z \in [1,2],\ x \geq 0,\ y \geq 0\right\}.$$

Răspuns. 0.

10. Fie câmpul vectorial

$$F(x,y,z)=(2z-2y,2x-2z,2y-2x)$$

şi elipsoidul $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+z^2=1$ Să se calculeze circulaţia câmpului F în lungul curbei de intersecţie dintre elipsoid şi semiplanele de coordonate $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$ în sens pozitiv.

Răspuns. 11π.

11. Fie domeniul $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$ şi funcţiile

$$P(x,y)=\begin{cases}0, & \text{dacă} \quad (x,y)=(0,0)\\ \dfrac{-y}{\left(x^2+y^2\right)^2}, & \text{dacă} \quad (x,y)\ne(0,0)\end{cases}$$

şi

$$Q(x,y)=\begin{cases}0, & \text{dacă} \quad (x,y)=(0,0);\\ \dfrac{xy^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}, & \text{dacă} \quad (x,y)\ne(0,0).\end{cases}$$

Dacă funcţia $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}$ se prelungeşte prin continuitate în origine, să se calculeze integralele

$$I_1=\oint_{\partial D} P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

şi

$$I_2=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Să se explice rezultatul obţinut.

Răspuns.

$$I_1=\oint_{\partial D} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\pi$$

$$I_2=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

$I_1\ne I_2$, deoarece funcţiile P şi Q nu sunt continue şi nu admit derivate parţiale în origine.

12. Să se calculeze $\oint_{\partial D} (x-y)\mathrm{d}x + \mathrm{d}y$, dacă

$$D = \left\{(x,y) \middle| x^2 + y^2 \le 2x,\ y \ge 0\right\}.$$

Răspuns. $\frac{\pi}{2}$.

13. Să se calculeze $\int_{\mathrm{AMB}} \mathrm{e}^{xy}\left[y^2\mathrm{d}x + (1+xy)\mathrm{d}y\right]$ dacă punctele A şi B se găsesc pe axa Ox şi aria figurii limitate de curba considerată $\overset{\frown}{\mathrm{AMB}}$ şi segmentul $\overline{\mathrm{AB}}$ este egală cu S.

Răspuns. 0.

14. Să se calculeze

$$\oint_C \mathrm{e}^x\left[(1-\cos y)\mathrm{d}x - (y - \sin y)\mathrm{d}y\right],$$

dacă C este frontiera domeniului

$$D = \left\{(x,y) \middle| x \in [0,\pi],\ 0 \le y \le \sin x\right\}$$

parcurs în sens pozitiv.

Răspuns. $\frac{1}{5}\left(1-\mathrm{e}^{\pi}\right)$.

15. Să se calculeze integrala

$$\oint_C (y-z)\mathrm{d}x + (z-x)\mathrm{d}y + (x-z)\mathrm{d}z,$$

curba C este obținută prin intersecția cilindrului $x^2 + y^2 = 1$ cu planul $x + z = 1$.

Răspuns. 4π.

16. Să se calculeze integrala

$$\oint_C \left(y^2+z^2\right)\mathrm{d}x + \left(x^2+z^2\right)\mathrm{d}y + \left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}z,$$

dacă C este curba aflată la intersecția sferei $x^2 + y^2 + z^2 = 2 \cdot R \cdot x$ cu cilindrul $x^2 + y^2 = 2 \cdot r \cdot x,\ 0 < r < R,\ z > 0$, parcursă în sens trigonometric privind dinspre partea pozitivă a axei Ox.

Răspuns. $2\pi R r^2$.

17. Să se calculeze integrala

$$\iint_S \left(2x+xy^2\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(z^2-\frac{1}{3}y^3\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+xy\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

unde S este suprafaţa exterioară a solidului comun suprafeţelor $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=2z$ şi $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=z^2$.

Răspuns. 16π.

18. Să se calculeze integrala

$$\oint_C y^2\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}y+x^2\mathrm{d}z,$$

dacă C este curba lui Viviani definită prin intersecţia suprafeţelor $x^2+y^2+z^2=a^2$ şi $x^2+y^2=a\cdot x,\ a>0$.

Răspuns. $-\frac{\pi a^3}{4}$.

19. Folosind formula lui Green să se calculeze integrala

$$I=\int_\Gamma x^2\mathrm{d}y-y^2\mathrm{d}x,$$

unde Γ este bucla lui Descartes dată de ecuaţia

$$x^3+y^3=3a\cdot x\cdot y,\ a\in\mathbb{R}_+^*.$$

Să se verifice rezultatul prin calcul direct.

Răspuns. $I=\frac{28\sqrt{3}\pi}{9}a^3$.

Indicaţie. O reprezentare parametrică posibilă a buclei Descartes este:

$$\Gamma:\begin{cases} x=3a\cdot\left(\rho(\theta)\cos\theta\right)^{2/3}; \\ y=3a\cdot\left(\rho(\theta)\sin\theta\right)^{2/3}, \end{cases}\quad \theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right].$$

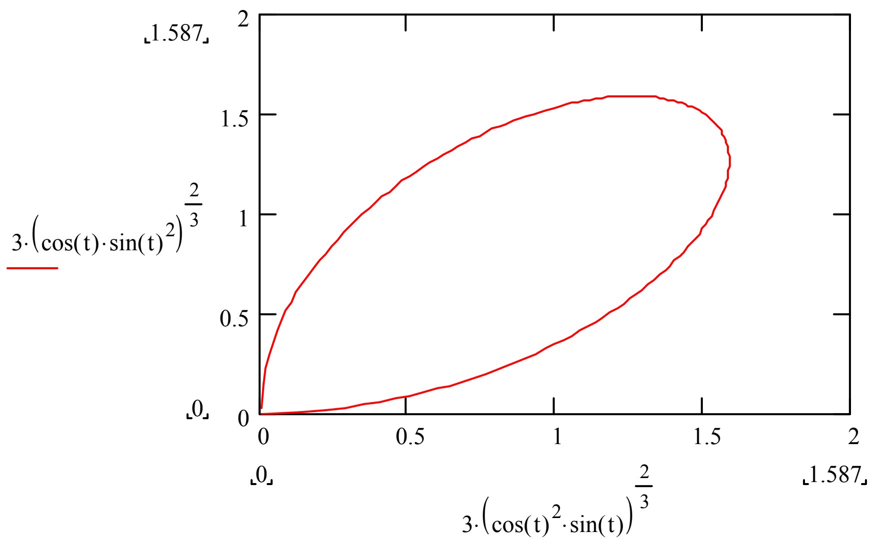


Fig. 9.13

unde

$$\rho(\theta)=\cos\theta\cdot\sin\theta\,.$$

20. Calculați integrala curbilinie

$$I=\int_{\Gamma} x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x\,,$$

unde Γ este hipocicloida

$$\Gamma:\begin{cases} x=a\cos^3\theta; \\ y=a\sin^3\theta, \end{cases} \qquad \theta\in[0,2\pi]\,.$$

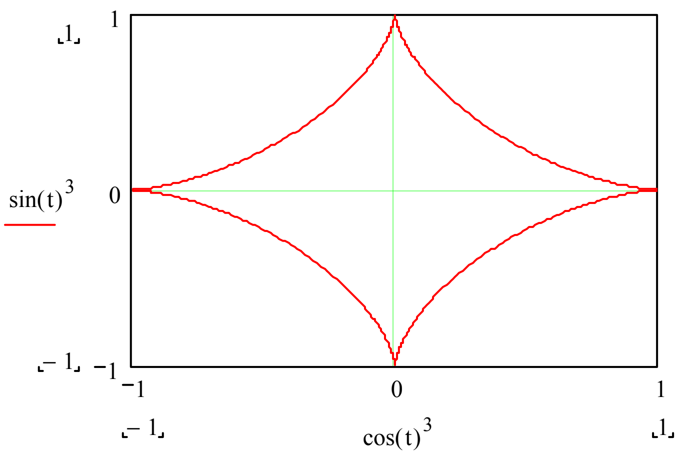


Fig. 9.14

Răspuns. $I=\dfrac{3\pi}{4}a^2\,.$

21. Calculați direct şi apoi verificați rezultatul folosind formula Stokes, următoarea integrală curbilinie

$$\Gamma = \int_{\Gamma} x^2 y^3 \mathrm{d}x + \mathrm{d}y + z\mathrm{d}z,$$

unde Γ este cercul

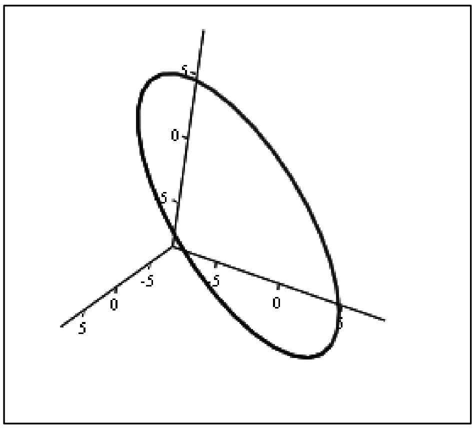
$$\Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 = R^2; \\ z = 0. \end{cases}$$

Răspuns. $I = -\dfrac{\pi R^6}{8}$.

22. Determinați circulația vectorului

$$\overline{v} = z^3 \overline{i} + x^3 \overline{j} + y^3 \overline{k}$$

pe curba Γ aflată la intersecția hiperboloidului $2x^2 - y^2 + z^2 = R^2$ cu planul $x + y = 0$. Verificați rezultatul cu formula Stokes.



C

Fig. 9.15

Răspuns. $\mathrm{C}(\overline{v}, \Gamma) = \dfrac{3}{2}\pi R^4$.

23. Determinați cu ajutorul teoremei Gauss-Ostrogradski fluxul câmpului vectorial

$$\overline{v} = x^2 y \overline{i} + x y^2 \overline{j} + xyz\overline{k}$$

prin suprafața S ce este bordura domeniului

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \middle| x^2 + y^2 + z^2 \le R^2,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0 \right\},\ R > 0;$$

în direcția normalei exterioare.

Răspuns. $\phi(\overline{v},S)=\dfrac{R^5}{3}$.

24. Să se calculeze integrala

$$I=\iint_S \left(x^3\cos\alpha+y^3\cos\beta+z^3\cos\gamma\right)\mathrm{d}\sigma,$$

unde S este suprafața sferei $x^2+y^2+z^2=R^2$, $R>0$, iar α, β, γ sunt unghiurile formate de normala exterioară cu direcția pozitivă a axelor de coordonate.

Răspuns. $I=\dfrac{12}{5}\pi R^5$.

25. Să se calculeze, aplicând formula lui Gauss-Ostrogradski, integrala de suprafață

$$I=\iint_S (x-y+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-z+x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

unde $S=\partial\Omega$ este fața exterioară a suprafeței octoedrului

$$\Omega:=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, |x-y+z|+|y-z+x|+|z-x+y|\le 1\right\}.$$

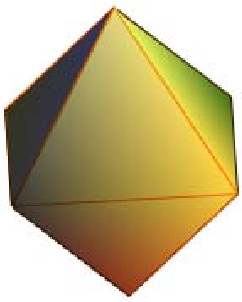


Fig. 9.16

Răspuns. $I=1$.

Indicație. În integrala triplă se face schimbarea de variabile

$$T=\begin{cases} x-y+z=u, & u\in[-1,1];\\ y-z+x=v, & v\in[-1,1];\\ z-x+y=w, & w\in[-1,1]. \end{cases}$$

26. Calculați folosind formula Gauss-Ostrogradski integrala de suprafață:

$$I=\iint_S xz\mathrm{d}x\mathrm{d}z+yx\mathrm{d}y\mathrm{d}x+zy\mathrm{d}z\mathrm{d}y,$$

unde S este bordura domeniului

$$\Omega=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2+y^2\le R^2,\, x\ge 0,\, y\ge 0,\, 0\le z\le h\right\},\ R,h\in\mathbb{R}_+^*.$$

Răspuns. $I=R^2h\left(\frac{2R}{3}+\frac{\pi h}{3}\right).$

27. Determinați fluxul câmpului vectorial

$$\overline{v}=x^2\overline{i}+y^2\overline{j}+z^2\overline{k}$$

prin suprafața S a conului

$$\Omega=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}\le 0,\ 0\le z\le b\right\}$$

în direcția normalei exterioare.

Răspuns. $\phi(\overline{v},S)=\frac{\pi a^2b^2}{2}.$

28. Să se calculeze, folosind formula integrală a lui Stokes, integrala:

$$I=\oint_C y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z,$$

unde C este conturul aflat la intersecția planului $x+y+z=0$ cu sfera $x^2+y^2+z^2=a^2,\ a>0$, parcurs în sens direct față de axa Ox.

Răspuns. $\pi a^2\sqrt{3}$.

29. Să se calculeze, folosind formula integrală lui Gauss-Ostrogradski, integrala:

$$I=\oiint_S (x-y+z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+(y-z+x)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+(z-x+y)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y,$$

unde S este suprafața tetraedrului ABCO cu vârfurile A$(1,0,0)$, B$(0,1,0)$, C$(0,0,1)$ şi O$(0,0,0)$.

Răspuns. $\frac{1}{2}.$

30. **(i)** Să se calculeze în două moduri integrala:

$$I=\int_C -x^2\cdot y\mathrm{d}x+x\cdot y^2\mathrm{d}y,$$

unde C este curba închisă dată de ecuația: $x^2+y^2=a^2,\ a>0$.

(ii) Calculați valoarea integralei:

$$I = \int_{\overset{\frown}{AB}} \left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}x,$$

unde $\overset{\frown}{AB}$ este arcul din cercul $x^2 + y^2 = 2 \cdot x$ cu $\mathrm{A}(0,0)$ şi $\mathrm{B}(1,1)$.

Răspuns. (i) $\frac{\pi}{2} a^4$; **(ii)** 1.

MODULUL 2

ŞIRURI ŞI SERII DE FUNCŢII. SERII DE PUTERI

În acest modul sunt prezentate pe parcursul a două lecţii principalele noţiuni teoretice referitoare la convergenţa şirurilor şi seriilor de funcţii şi a seriilor taylor şi de puteri, precum şi algoritmii cei mai des întâlniţi pentru rezolvarea problemelor specifice referitoare la tematica acestui modul.

După parcurgerea celor două lecţii din cuprinsul modulului studenţii vor dobândi cunoştinţele teoretice şi îşi vor forma deprinderile practice cu ajutorul cărora vor putea recunoaşte, înţelege şi rezolva probleme referitoare la:

- convergenţa simplă şi uniformă a şirurilor şi seriilor de funcţii, asemănările şi deosebirile dintre aceste noţiuni;
- transferul proprietăţilor de continuitate, derivabilitate, integrabilitate, existenţă a primitivelor termenilor şirurilor şi seriilor de funcţii uniform convergente asupra funcţiei limită, respectiva sumă;
- criterii, metode şi algoritmi de rezolvare a problemelor de convergenţă simplă şi uniformă a şirurilor şi seriilor de funcţii şi aplicaţii ale lor.

Materialul trebuie parcurs în ordinea sa firească prezentată în cuprinsul modulului, inclusiv în porţiunea referitoare la aplicaţii. Metoda de studiu va fi cea specifică disciplinelor matematice, cu utilizarea expresă a adnotărilor făcute cu creionul pe tot parcursul textului. Pentru fiecare tip de exerciţiu se recomandă identificarea algoritmului şi descompunerea acestuia în etape succesive. Se recomandă studierea soluţiilor problemelor rezolvate şi rezolvarea completă a problemelor propuse în testele de autoevaluare şi în tema de control propusă.

Timpul mediu necesar parcurgerii şi însuşirii noţiunilor teoretice, algoritmilor de rezolvare a problemelor, formării deprinderilor practice de rezolvare şi dobândirii competenţelor enumerate anterior este de aproximativ 6-8 ore de studiu pentru fiecare lecţie, într-un ritm de 2-3 ore pe zi.

LECȚIA 1

ŞIRURI DE FUNCȚII. SERII DE FUNCȚII

2.1 Şiruri de funcții

Fie familia de funcții $(f_\alpha)_{\alpha\in I}$ definite pe aceeaşi mulțime X şi cu valori reale. Dacă mulțimea indicilor I este mulțimea numerelor naturale, atunci avem un şir de funcții.

Notație: $(f_n)_n$.

Definiția 2.1.1. Un punct $a\in X$ este ***punct de convergență al şirului de funcții*** $(f_n)_n$ dacă şirul numeric $(f_n(a))_n$ este convergent.

Mulțimea punctelor de convergență ale şirului de funcții $(f_n)_n$ se numeşte ***mulțimea de convergență*** a şirului $(f_n)_n$.

Exemple

1) Şirul de funcții $f_n(x)=x^n,\ n\in\mathbb{N}$, are mulțimea de convergență intervalul $[-1,1]$.

2) Şirul de funcții $f_n(x)=\dfrac{x}{n^2},\ n\in\mathbb{N}^*$, are mulțimea de convergență $\mathbb{R}$.

Definiția 2.1.2. Fie $(f_n)_n$ un şir de funcții definite pe mulțimea X şi având mulțimea de convergență A. Dacă $f(x)$ este limita şirului numeric $(f_n(x))_n$, $(\forall)\ x\in A$, atunci s-a stabilit o corespondență $x\to f(x)$ a mulțimii A în mulțimea numerelor reale. Funcția $f(x)$ definită prin $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, $x\in A$, se numeşte ***funcția limită*** pe mulțimea A a şirului de funcții considerat.

Exemple

1) Şirul de funcții $f_n(x)=\dfrac{x^n}{n!}$ are mulțimea de convergență $\mathbb{R}$ şi pentru orice x real $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0 \Rightarrow f(x)=0,\ (\forall)\ x\in\mathbb{R}$.

2) Şirul de funcţii $f_n(x) = a^{\frac{nx+1}{n+2}}$, $n \in \mathbb{N}$, $a > 0$, este convergent pentru orice *x* real şi are funcţia limită $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$.

Definiţia 2.1.3. Se spune că şirul de funcţii $(f_n)_n$ este ***simplu convergent*** pe *X* către funcţia *f*, dacă pentru $(\forall)\ x \in X$ şi pentru $(\forall)\ \varepsilon > 0$ există un număr $n(\varepsilon, x)$, astfel încât $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, $(\forall)\ n > n(\varepsilon, x)$.

Exemplu

Şirul de funcţii $f_n(x) = \dfrac{x^4}{n^2}$ definit pe $\mathbb{R}$ este convergent pe $\mathbb{R}$ către funcţia $f(x) = 0$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$. Se caută un număr $n(\varepsilon, x)$, astfel încât $\dfrac{x^4}{n^2} < \varepsilon$, $(\forall)\ n > n(\varepsilon, x)$. Rezultă $n^2 > \dfrac{x^4}{\varepsilon} \Rightarrow n(\varepsilon, x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{\varepsilon}}$.

Definiţia 2.1.4. Se spune că şirul de funcţii $(f_n)_n$ este ***uniform convergent*** pe *X* către funcţia *f*, dacă pentru $(\forall)\varepsilon > 0$ există un număr $n(\varepsilon)$, astfel încât $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, $(\forall)\ n > n(\varepsilon)$ şi $(\forall)\ x \in X$.

Observaţie. Un şir de funcţii uniform convergent este şi simplu convergent. Reciproca nu este adevărată.

Propoziţia 2.1.5. Dacă şirul de funcţii $(f_n)_n$, definit pe mulţimea *X*, satisface condiţiile $|f_n(x)| \le a_n$, $(\forall)\ x \in X$, $n \in \mathbb{N}$, unde $(a_n)_n$ este un şir de numere pozitive cu limita zero, atunci şirul $(f_n)_n$ converge uniform către funcţia constantă zero.

Corolar

Dacă pentru un şir de funcţii $(f_n)_n$ definite pe o mulţime *X*, există o funcţie $f : X \to R$ şi un şir de numere reale $(a_n)_n$, $a_n > 0$, pentru care $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, astfel încât $|f_n(x) - f(x)| < a_n$, $(\forall)\ x \in X$, atunci şirul de funcţii $(f_n)_n$ converge uniform către funcţia *f*.

Criteriul lui Cauchy

Şirul $(f_n)_n$ de funcţii $f_n : X \to \mathbb{R}$ converge uniform pe *X* către funcţia $f : X \to \mathbb{R}$ dacă şi numai dacă: $(\forall)\ \varepsilon > 0$, $(\exists)\ n(\varepsilon)$ pentru care

$$\left|f_n(x) - f_m(x)\right| < \varepsilon,\ (\forall)\ n,m > n(\varepsilon) \text{ şi } (\forall)\ x \in I .$$

Teorema 2.1.6. Fie $(f_n)_n$ un şir de funcţii uniform convergent pe *X* către funcţia *f*. Dacă toate funcţiile f_n sunt continue în punctul $a \in X$, atunci şi funcţia limită va fi continuă în punctul *a*.

Observaţii:

1) În cazul în care $a \in X \cap X'$, teorema 2.1.6 este valabilă sub forma mai generală: dacă şirul de funcţii $(f_n)_n$ este uniform convergent pe $X \setminus \{a\}$, unde $a \in X \cap X'$ şi dacă toate funcţiile f_n sunt continue în punctul a, atunci şirul de funcţii $(f_n)_n$ este uniform convergent pe *X* şi limita sa este continuă în *a*.

2) Teorema 2.1.6 rămâne valabilă dacă funcţiile f_n sunt continue la stânga (la dreapta) în punctul *a* şi atunci funcţia *f* va fi continuă la stânga (la dreapta) în punctul *a*.

3) Condiţia ca şirul de funcţii $(f_n)_n$ să fie uniform convergent pe mulţimea *X* este numai suficientă, nu şi necesară, pentru ca funcţia *f* să fie continuă într-un punct *a*.

Exemplu

Fie şirul de funcţii $(f_n)_n$ definite prin $f_n(x) = x^n$, $x \in (0,1)$. Pentru acesta, $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0 = f(x)$, $(\forall)\ x \in (0,1)$. Funcţia *f* şi funcţiile f_n sunt continue, dar şirul de funcţii considerat nu este uniform convergent.

Corolar

Un şir $(f_n)_n$ de funcţii continue pe *X*, uniform convergent pe *X*, are limita o funcţie continuă pe *X*.

Teorema Dini. Dacă şirul de funcţii $(f_n)_n$, $f_n : I \to \mathbb{R}$, este simplu convergent către funcţia $f : I \to \mathbb{R}$, unde *I* este un interval compact şi dacă $(f_n)_n$ este monoton în fiecare punct al lui *I*, iar funcţiile f_n şi *f* sunt continue pe *I*, atunci convergenţa şirului este uniformă.

Teorema 2.1.7. Fie *I* un interval mărginit şi $(f_n)_n$ un şir de funcţii derivabile, definite pe *I*. Dacă $(f_n)_n$ converge uniform către *f* şi şirul derivatelor

$(f'_n)_n$ converge uniform pe *I* către o funcție *g*, atunci funcția *f* este derivabilă pe *I* şi $f'(x)=g(x)$, $(\forall)\ x\in I$.

Observație

Reciproca acestei teoreme nu este adevărată. Un şir de funcții $(f_n)_n$ poate fi uniform convergent către funcția *f*, cu f_n derivabile şi *f* derivabilă, fără ca şirul derivatelor $(f'_n)_n$ să fie uniform convergent.

Exemplu

Şirul $f_n(x)=\dfrac{\sin nx}{n}$, $x\in[0,2\pi]$ este uniform convergent pe $[0,2\pi]$ către funcția $f(x)\equiv 0$, termenii şirului şi funcția limită sunt derivabili pe $[0,2\pi]$, dar şirul derivatelor $f'_n(x)=\cos nx$ nu este convergent pe $[0,2\pi]$.

Teorema 2.1.8. Dacă $(f_n)_n$ este un şir de funcții continue, uniform convergent pe un interval $[a,b]$ către funcția *f*, atunci:

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Exemplu

Şirul de funcții $f_n(x)=\dfrac{\cos nx}{n}$ definit pe $[0,\pi]$ este uniform convergent pe $[0,\pi]$ către funcția $f(x)\equiv 0$.

Avem $\dfrac{1}{n}\cdot\displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos nx\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{n^2}\cdot\sin nx\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\dfrac{1}{n^2}\cdot\sin\dfrac{n\pi}{2}\to 0$, când $n\to\infty$.

2.2 Serii de funcții

Definiția 2.2.1. Seria $f_1+f_2+...+f_n+...$, unde $f_1,\ f_2,...,f_n,...$ este un şir de funcții definite pe aceeaşi mulțime *X*, se numeşte ***serie de funcții***.

Notație: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

Pentru orice $x_0\in X$ avem seria numerică $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$, serie care poate fi convergentă sau divergentă.

Definiția 2.2.2. Mulțimea punctelor $x \in X$ pentru care seria $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ este convergentă se numeşte ***mulțimea de convergentă a seriei*** $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

Exemplu

Cu şirul de funcții $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}$, $x \in \mathbb{R}$, $n = 0,1,2,...$ se formează seria de funcții $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, care are mulțimea de convergență $(-\infty, \infty)$.

Definiția 2.2.3. Seria de funcții $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ este ***simplu convergentă*** pe X către o funcție f, dacă şirul sumelor parțiale $(s_n)_n$, $s_n = f_1 + f_2 + ... + f_n$ este simplu convergent pe X către f, pentru orice x.

Funcția f definită pe X se numeşte suma seriei $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

Definiția 2.2.4. Seria de funcții $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ este ***simplu convergentă*** pe X către o funcție f, dacă pentru $(\forall)$ $\varepsilon > 0$ şi pentru $(\forall)$ $x \in X$ există un număr $n(\varepsilon, x)$, astfel încât pentru orice $n > n(\varepsilon, x)$ să avem

$$|f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Exemplu

Seria de funcții $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$, $x \in \mathbb{R}$, este simplu convergentă pentru orice x real.

Pentru a demonstra aceasta, fie şirul sumelor parțiale:

$$s_n(x) = \frac{\sin x}{1^2} + \frac{\sin 2x}{2^2} + ... + \frac{\sin nx}{n^2} \Rightarrow |s_n(x)| \leq \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{n^2} = u_n,$$

unde şirul cu termenul general u_n este convergent.

Definiția 2.2.5. Fie seria de funcții $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, $f_n : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pentru $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ este ***uniform convergentă*** pe $B \subseteq A \subseteq X$, unde A este mulțimea de convergență simplă, dacă şirul sumelor parțiale $(s_n)_n$ este uniform convergent pe B.

Definiția 2.2.6. Seria de funcții $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ este ***uniform convergentă*** pe X către o funcție f, dacă pentru $(\forall)\ \varepsilon > 0$, $(\exists)\ n(\varepsilon)$, astfel încât pentru orice $n > n(\varepsilon)$ să avem

$$\left| f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) - f(x) \right| < \varepsilon,\ (\forall)\ x \in X.$$

Exemplu

Fie seria de funcții $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. Pentru aceasta, şirul sumelor parțiale $s_n(x) = 1 + x + \ldots + x^n = \frac{1}{1-x} + \frac{x^{n+1}}{x-1}$ converge uniform către funcția $f(x) \equiv \frac{1}{1-x}$, deci seria este uniform convergentă pe $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

Criteriul general de convergență uniformă

Seria de funcții $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ este uniform convergentă pe $X \subset \mathbb{R}$ dacă şi numai dacă $(\forall)\ \varepsilon > 0$, $(\exists)\ n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, astfel încât $\left| f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \ldots + f_{n+p}(x) \right| < \varepsilon$, $(\forall)\ n > n_\varepsilon$, $(\forall)\ p \in \mathbb{N}^*$, $(\forall)\ x \in A$.

Criteriul lui Weierstrass

Fie şirul de funcții $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $f_n : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un şir de numere reale strict pozitive. Dacă $\left| f_n(x) \right| \le a_n$, $(\forall)\ x \in X$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$, şi dacă seria de numere $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$ este convergentă, atunci seria de funcții $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ este uniform convergentă pe X.

Exemplu

Fie seria de funcții $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$, $x\in(1,\infty)$. Aceasta este uniform convergentă pentru orice $x\in(1,\infty)$, deoarece pentru $(\forall)\ x\in(1,\infty)$, $(\exists)\ a\in(1,\infty)$, cu $a<x$; deci, $\frac{1}{n^x}<\frac{1}{n^a}$, iar seria numerică $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^a}$ este convergentă.

Teorema 2.2.7. Fie şirul de funcții continue $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : X\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty}f_n$ este uniform convergentă pe *X* către *f*, atunci funcția *f* este continuă pe *X*.

Teorema 2.2.8. Fie seria de funcții $\sum_{n=1}^{\infty}f_n$ uniform convergentă pe *X* către funcția *f*. Dacă funcțiile f_n sunt derivabile pe *X* şi seria derivatelor $\sum_{n=1}^{\infty}f_n'$ este uniform convergentă pe *X* către funcția *g*, atunci funcția *f* este derivabilă pe *X* şi $f'=g$.

Exemplu

Seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^3}$, $x\in[0,2\pi]$, este uniform convergentă pe $[0,2\pi]$, deoarece $\left|\frac{\cos nx}{n^3}\right|\le\frac{1}{n^3}$. Seria derivatelor este $-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$, care este uniform convergentă pe $[0,2\pi]$, deoarece $\left|-\frac{\sin nx}{n^2}\right|\le\frac{1}{n^2}$.

Notând cu $f(x)$ suma seriei considerată, vom avea $f'(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$, $x\in[0,2\pi]$.

Teorema 2.2.9. Fie seria de funcții $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ uniform convergentă pe $[a,b]$ către funcția *f*. Dacă funcțiile f_n sunt integrabile pe $[a,b]$, atunci funcția *f* este integrabilă pe $[a,b]$ şi $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x$.

Observație. Teorema serveşte nu numai pentru calculul integralei definite a unei serii de funcții, ci şi a primitivelor pe orice interval conținut în mulțimea de convergență uniformă a seriei considerată.

Exemple

1) Seria trigonometrică $f(x) = 1 + \frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 2x}{2^2} + \ldots + \frac{\cos nx}{n^2} + \ldots$ este uniform convergentă pentru orice *x* real.

Rezultă că $\int f(x)\mathrm{d}x = C + x + \frac{\sin x}{1^3} + \frac{\sin 2x}{2^3} + \ldots + \frac{\sin nx}{n^3} + \ldots$.

2) Seria de funcții $1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$ este uniform convergentă pentru orice $x \in (-1,1)$ şi are suma $\frac{1}{1-x}$. Deci, pentru $x \in (-1,1)$ avem

$$\int \frac{1}{1-x}\mathrm{d}x = C + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots = -\ln(1-x) + C'.$$

Pentru $x = 0,\ C = C' \Rightarrow \ln(1-x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \ldots - \frac{x^n}{n} - \ldots,\ |x| < 1$.

2.3 Aplicații

2.3.1 Să se arate că şirul de funcții $(f_n)_n$, $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n\left(1 - x^n\right)$ este convergent, dar nu este uniform convergent pe $[0,1]$.

Indicație de rezolvare:

Pentru $x \in [0,1] \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, deci şirul de funcții este simplu convergent către funcția constantă $f(x) = 0,\ (\forall)\ x \in [0,1]$.

Pentru a arăta că nu este uniform convergent către *f*, se consideră $x_n = 2^{-1/n} \in [0,1]$, pentru care $f_n(x_n) = \frac{1}{4},\ (\forall)\ n \in \mathbb{N}$.

2.3.2 Să se arate că şirul de funcţii $(f_n)_n$, $f_n:(1,\infty)\to\mathbb{R}$, definite prin: $f_n(x)=\sqrt{(n^2+1)\cdot\sin^2\frac{\pi}{n}+nx}-\sqrt{nx}$ este uniform convergent.

Indicaţie de rezolvare:

$$0\le f_n(x)=\frac{(n^2+1)\cdot\sin^2\frac{\pi}{n}}{\sqrt{(n^2+1)\cdot\sin^2\frac{\pi}{n}+nx}+\sqrt{nx}}<\frac{(n^2+1)\cdot\frac{\pi^2}{n^2}}{2\sqrt{n}}<\frac{2\pi^2}{2\sqrt{n}}=\frac{\pi^2}{\sqrt{n}}.$$

Utilizând teorema anterioară pentru $a_n=\frac{\pi^2}{\sqrt{n}}\to 0$, rezultă că şirul de funcţii converge uniform către funcţia constantă $f(x)=0$.

2.3.3 Să se arate că şirul de funcţii $(f_n)_n$, $f_n:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\frac{1}{n}\cdot\mathrm{e}^{-nx}$ converge uniform către funcţia $f(x)=0,\ x\in[0,\infty)$.

2.3.4 Să se arate că şirul de funcţii $(f_n)_n$ este uniform convergent pe intervalul indicat, pentru:

a) $f_n(x)=\frac{x^2}{(n^2+x^4)}$, $x\in[1,\infty)$; **b)** $f_n(x)=\frac{x}{x+n}$, $x\in[3,4]$;

c) $f_n(x)=\frac{x^n}{(1+x^{2n})^n}$, $x\in[1,\infty)$; **d)** $f_n(x)=\frac{\cos nx}{n^2+1}$, $x\in[0,\pi]$.

Indicaţie de rezolvare:

a) $0\le\frac{x^2}{n^2+x^4}\le\frac{1}{2n}\Rightarrow a_n=\frac{1}{2n}\to 0$, de unde şirul de funcţii converge uniform către funcţia constantă zero;

b) $f(x)=0$;

c) $0\le f_n(x)\le\frac{1}{2^n}\Rightarrow a_n=\frac{1}{2^n}\to 0\Rightarrow f(x)=0$;

d) $f(x)=0$.

2.3.5 Să se arate că şirul de funcţii $(f_n)_n$ converge simplu, dar nu converge uniform:

a) $f_n(x)=\dfrac{x}{x+n},\ x\in(0,\infty)$;

b) $f_n(x)=\dfrac{x^n}{1+x^{2n}},\ x\in[0,1]$.

Indicaţie de rezolvare:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0$, deci şirul de funcţii converge simplu către $f(x)=0$; pentru $x=n \Rightarrow f_n(x)=\dfrac{1}{2},\ (\forall)\ n\in\mathbb{N}$, deci şirul nu converge uniform;

b) $f(x)=0,\ x\in[0,1)$ şi $f(1)=\dfrac{1}{2}$. Se alege $x_n=1-\dfrac{1}{n}\in[0,1]$, pentru care $f_n(x_n)=\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n\cdot\left[1+\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{2n}\right]^{-1}\to\dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}+1}$, deci şirul nu converge uniform.

2.3.6 Să se arate că şirul de funcţii $(f_n)_n,\ f_n:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, definite prin $f_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}2^k\cdot\sin\dfrac{1}{3^k\cdot x}$ nu este uniform convergent.

Indicaţie de rezolvare:

Se arată că nu se verifică criteriul lui Cauchy, adică $(\exists)\ \varepsilon>0$, astfel încât pentru $(\forall)\ n\in\mathbb{N}$, $(\exists)\ x_n\in(0,\infty)$ şi $(\exists)\ p_n\in\mathbb{N}^*$ cu $\left|f_{n+p}(x_n)-f_n(x_n)\right|>\varepsilon$

$$\left|f_{n+p}(x)-f_n(x)\right|=\left|2^{n+1}\cdot\sin\frac{1}{3^{n+1}x}+\ldots+2^{n+p}\cdot\sin\frac{1}{3^{n+p}x}\right|$$

şi pentru $x=x_n=\dfrac{2}{3^{2n+1}\pi}$

$$\sin\frac{1}{3^{n+1}x_n}=\sin 3^n\cdot\frac{\pi}{2}=(-1)^n,\ldots,\ \sin\frac{1}{3^{n+p}x_n}=\sin 3^{p-n-1}\cdot\frac{\pi}{2}=(-1)^{p-n-1}$$

şi luând $p=n\Rightarrow$

$$\left|f_{2n}(x)-f_n(x)\right|=\left|2^{n+1}(-1)^n+\ldots+2^{2n}(-1)\right|=$$

$$=2^{n+1}\left|1-2+4+\ldots+(-1)^{n-1}2^{n-1}\right|>\frac{1}{2}=\varepsilon.$$

2.3.7 Să se arate că şirul de funcţii $(f_n)_n$, $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definite prin $f_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos kx}{k(k+1)}$ este uniform convergent şi limita sa este o funcţie continuă pe $\mathbb{R}$.

Indicaţie de rezolvare:

Se aplică criteriul lui Cauchy.

$$\left|f_{n+p}(x)-f_n(x)\right|=\left|\frac{\cos(n+1)x}{(n+1)(n+2)}+\frac{\cos(n+2)x}{(n+2)(n+3)}+\ldots+\frac{\cos(n+p)x}{(n+p)(n+p+1)}\right|<$$

$$<\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\ldots+\frac{1}{(n+p)(n+p+1)}<$$

$$<\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{n+p}-\frac{1}{n+p+1}=$$

$$=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+p+1}<\frac{1}{n+1}<\varepsilon.$$

Deci, şirul de funcţii este uniform convergent, iar funcţiile f_n fiind continue pe $\mathbb{R}$, rezultă că limita şirului va fi o funcţie continuă pe $\mathbb{R}$.

2.3.8 Să se studieze convergenţa şirului de funcţii $(f_n)_n$, $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$, definite prin $f_n(x)=\frac{x^n}{n}$, $(\forall)\ n\in\mathbb{N}^*$.

Indicaţie de rezolvare:

Funcţiile f_n sunt continue pe intervalul compact $[0,1]$.

$\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n}=0$, deci şirul este simplu convergent către funcţia constantă $f\equiv 0$ continuă. De asemenea, şirul de funcţii considerat este monoton descrescător în fiecare punct $x\in[0,1]$, deci conform Teoremei Dini, şirul este uniform convergent.

2.3.9 Să se determine mulţimea de convergenţă, *A*, pentru următoarele serii de funcţii:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\left(\frac{1-x}{1-2x}\right)^n$, $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$;

b) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{\ln n}\cdot\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^n,\ x\in\mathbb{R}$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2-x)\left(2-x^{1/2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(2-x^{1/n}\right),\ x>0$;

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}\cdot\ln\left(1+a^n\right),\ a\geq 0,\ x\in\mathbb{R}$;

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2+5}{7n^2+3n+2}\cdot\left(\frac{x}{2x+1}\right)^n,\ x\neq\frac{1}{2}$;

f) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{(n+1)^5\cdot x^{2n}},\ x\neq 0$;

g) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^n\cdot\sin\frac{x}{3^n},\ x\in\mathbb{R}$;

h) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nx}{\mathrm{e}^{nx}},\ x\in\mathbb{R}$;

i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{x^n},\ x\neq 0$.

Indicaţie de rezolvare:

a) pentru $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$ arbitrar fixat, se consideră seria numerică $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$, unde $f_n(x)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\left(\frac{1-x}{1-2x}\right)^n$. Pentru aceasta se studiază convergenţa absolută, utilizând criteriul rădăcinii.

Rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|f_n(x)|}=\left|\frac{1-x}{1-2x}\right|$, de unde seria este absolut convergentă pentru $\left|\frac{1-x}{1-2x}\right|<1\Leftrightarrow x\in(-\infty,0)\cup\left(\frac{2}{3},\infty\right)$. Pentru $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right]$ seria este divergentă, deoarece nu este verificată condiţia necesară de convergenţă a unei serii;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left|1-x^2\right|}{1+x^2}\cdot\frac{\ln n}{\ln(n+1)}=\frac{\left|1-x^2\right|}{1+x^2}<1,$

pentru $(\forall)\ x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Pentru $x=0$, se obține seria alternată $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{1}{\ln n}$, care este convergentă. Rezultă că mulțimea A de convergență a seriei de funcții este $\mathbb{R}$;

c) **d**eoarece $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x}=1$ şi $x>0$, rezultă că de la un anumit rang n_0, termenii seriei de funcții vor avea acelaşi semn, căci $2-\sqrt[n]{x}>0,\ (\forall)\ n\geq n_0$. Se va obține, astfel, o serie cu termenii pozitivi, pentru care se aplică criteriul Raabe-Duhamel.

$\lim_{n\to\infty} n\left[\frac{f_n(x)}{f_{n+1}(x)}-1\right]=\ln x$, de unde rezultă că pentru $x>\mathrm{e}$ seria este convergentă, pentru $x<\mathrm{e}$ este divergentă, iar pentru $x=\mathrm{e}$ seria este divergentă, utilizând criteriul al doilea de comparație cu seria divergentă $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

De asemenea, pentru $x=2$ seria este convergentă, deoarece $f_n(2)=0$.

Rezultă mulțimea de convergență $A=\{2\}\cup(\mathrm{e},\infty)$;

d) pentru $a\in[0,1) \Rightarrow A=\mathbb{R}$. Pentru $a=1\Rightarrow A=(1,\infty)$.

Pentru $a\in(1,\infty)\Rightarrow A=(2,\infty)$;

e) $A=(-\infty,-1)\cup\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2},\infty\right)$;

f) $A=(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$;

g) $A=\mathbb{R}$;

h) $A=(0,\infty)$;

i) $A=\varnothing$.

2.3.10 Fie funcția $f(x)=\begin{cases} x,\ x\in[0,1] \\ 2-x,\ x\in(1,2]\end{cases}$ şi având proprietatea $f(x)=f(x+2)$. Fie $F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{4^n}\cdot f(4^n\cdot x)$. Să se arate că:

a) F este continuă pe $\mathbb{R}$;

b) F nu este derivabilă pe $\mathbb{R}$.

Indicație de rezolvare:

a) f este continuă pe intervalul compact $[0,2]$ şi subunitară. Cum ea este periodică de perioadă 2, rezultă că este subunitară pe $\mathbb{R}$, deci mărginită.

Se demonstrează că seria de funcţii $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{4^n} \cdot f\left(4^n \cdot x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ este uniform convergentă

$$s_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) = f(x) + \left(\frac{3}{4}\right) \cdot f(4 \cdot x) + \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot f\left(4^2 \cdot x\right) + \ldots +$$

$$+\left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot f\left(4^n \cdot x\right)$$

Aplicând criteriul de convergenţă al lui Cauchy, se obţine:

$$\left|s_{n+p}(x) - s_n(x)\right| = \left|\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} \cdot f\left(4^{n+1} \cdot x\right) + \ldots + \left(\frac{3}{4}\right)^{n+p} \cdot f\left(4^{n+p} \cdot x\right)\right| \le$$

$$\le \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} \cdot \left[1 + \frac{3}{4} + \ldots + \left(\frac{3}{4}\right)^{p-1}\right] = \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} \cdot 4 \cdot \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^p\right) \le$$

$$\le \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} \cdot 4 \to 0, \text{ pentru } n \to \infty;$$

rezultă că şirul sumelor parţiale este uniform convergent, deci seria este uniform convergentă şi F este continuă;

b) fie $x \in \mathbb{R}$ arbitrar fixat şi $m \in \mathbb{N}$ fixat. Atunci $\left(4^m \cdot x\right) \in \mathbb{R}$ şi deci există $k \in \mathbb{Z}$, astfel încât $k \le 4^m \cdot x \le k+1 \Rightarrow \frac{k}{4^m} \le x \le \frac{k+1}{4^m}$.

Notăm $\alpha_m = \frac{k}{4^m}$, $\beta_m = \frac{k+1}{4^m} \Rightarrow \alpha_m \le x \le \beta_m$.

Fie numerele reale $\left(4^n \cdot \alpha_m\right)$, $\left(4^n \cdot \beta_m\right)$.

Pentru $m = n \Rightarrow \left(4^n \cdot \beta_m - 4^n \cdot \alpha_m\right) = 4^{n-m}(k+1-k) = 4^{n-m} = 1$.

Pentru $n > m \Rightarrow \left(4^n \cdot \beta_m - 4^n \cdot \alpha_m\right) = 4^{n-m} = \text{nr. par}$.

Pentru $n < m \Rightarrow \left(4^n \cdot \beta_m - 4^n \cdot \alpha_m\right) = 4^{n-m} = \frac{1}{4^{m-n}}$, de unde rezultă că, în acest caz, nu există nici un număr întreg cuprins între ele.

Din acestea rezultă $\left|f\left(4^n \cdot \beta_m\right) - f\left(4^n \cdot \alpha_m\right)\right| = \begin{cases} 4^{n-m}, & n \le m \\ 0, & n > m \end{cases}$ şi deci:

$$\left|F(\beta_m)-F(\alpha_m)\right|=\left|\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n\cdot f\left(4^n\cdot\beta_m\right)-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n\cdot f\left(4^n\cdot\alpha_m\right)\right|=$$

$$=\left|\sum_{n=0}^{m}\left(\frac{3}{4}\right)^n\left[f\left(4^n\cdot\beta_m\right)-f\left(4^n\cdot\alpha_m\right)\right]\right|=\sum_{n=0}^{m}\left(\frac{3}{4}\right)^n\cdot 4^{n-m}=$$

$$=\frac{1}{4^m}+\left(\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{1}{4^{m-1}}+\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot\frac{1}{4^{m-2}}+\ldots+\left(\frac{3}{4}\right)^m\geq$$

$$\geq 1+\left(\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{3}{4}\right)^2+\ldots+\left(\frac{3}{4}\right)^m=4\left[1-\left(\frac{3}{4}\right)^{m-1}\right]\to 4.$$

Cum $\lim\limits_{m\to\infty}(\beta_m-\alpha_m)=0$, rezultă că $\lim\limits_{m\to\infty}\frac{F(\beta_m)-F(\alpha_m)}{\beta_m-\alpha_m}=+\infty$, deci F nu este derivabilă pe $\mathbb{R}$.

2.3.11 Să se construiască o serie de funcții uniform convergentă, care să nu fie absolut convergentă în nici un punct $x\in\mathbb{R}$.

Indicație de rezolvare:

Fie $f_n(x)=\frac{(-1)^n}{|x|+n}$, $(\forall)\ x\in\mathbb{R}$, $(\forall)\ n\in\mathbb{N}$. Cum $\frac{1}{|x|+n}<\frac{1}{n}\to 0$ rezultă că seria considerată este uniform convergentă. În acelaşi timp, seria numerică a modulelor $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|$ are aceeaşi natură cu seria divergentă $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

2.3.12 Fie $A\subseteq\mathbb{R}$. Să se construiască o serie de funcții $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n$ care are mulțimea de convergență egală cu A.

Indicație de rezolvare:

Fie $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_n=\frac{1}{|x|+n^2}$, $(\forall)\ x\in A$ şi

$$f_n(x)=\frac{1}{|x|+n},\ (\forall)\ x\in\mathbb{R}\setminus A.$$

Seria $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ astfel definită are aceeaşi natură cu seria numerică $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ pentru $x \in A$ şi aceeaşi natură cu seria numerică $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ pentru $x \in \mathbb{R} \setminus A$.

Test de autoevaluare

1 Să se arate că şirul de funcții $(f_n)_n$, definite prin $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} \cdot \sin kx,\ x \in \mathbb{R}$, este convergent pe $\mathbb{R}$, iar limita sa este o funcție continuă, cu derivata continuă pe $\mathbb{R}$.

2 Să se arate că şirul de funcții $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = n \cdot x \cdot e^{-nx^2}$ converge, dar $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$.

3 Să se arate că şirul de funcții $(f_n)_n$, definite prin $f_n(x) = \frac{nx}{\left(1+n^2x^2\right)}$, $x \in [0,1]$ converge neuniform pe $[0,1]$, dar

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx.$$

4 Să se determine mulțimea de convergență şi uniform convergență a seriei $x + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{x}{1+nx} - \frac{x}{1+(n-1)x} \right]$, $0 \le x \le 1$. Să se determine suma seriei.

5 Utilizând criteriul lui Weierstrass, să se studieze convergența seriilor de funcții:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^3}{1+n^3 \cdot x^4}$, $x \in \mathbb{R}$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]\cdot\frac{\cos nx}{n+1},\ x\in\mathbb{R}$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^{2}+2^{n}},\ x\in\mathbb{R}$;

d) $\sum_{n=1}^{\infty}a^{n}\cdot\sin\frac{1}{3^{n}\cdot x^{2}},\ x\neq 0,\ |a|<3$.

LECȚIA 2

2.4 Serii de puteri

Definiția 2.4.1. O serie de forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,\ a_n \in \mathbb{R}$, se numeşte ***serie de puteri***.

Observație. Mulțimea de convergență a unei serii de puteri conține cel puțin un punct şi anume punctul $x = 0$, pentru care seria de puteri este convergentă şi are suma a_0.

Există serii de puteri care au mulțimea de convergență formată dintr-un singur punct şi există serii de puteri convergente pentru price x real.

Exemple

1) Seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} n! \cdot x^n$ este convergentă numai în punctul $x = 0$, deoarece pentru orice $x_0 \neq 0$ există un rang n pentru care $|n \cdot x_0| > 1$ şi deci $\lim_{n\to\infty} |n! \cdot x_0| = \infty$.

2) Seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ este convergentă pe $\mathbb{R}$, deoarece pentru orice $x_0 \in R \Rightarrow \left|\frac{u_{n-1}}{u_n}\right| = \frac{|x_0|}{n+1} \to 0$ pentru $n \to \infty$.

Teorema lui Abel

Pentru orice serie de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,\ a_n \in \mathbb{R}$, există un număr $\rho \geq 0$, finit sau infinit, pentru care :

a) seria este absolut convergentă pe intervalul $(-\rho, \rho)$;

b) seria este divergentă pentru $|x| > \rho$;

c) pentru orice $r \in (0, \rho)$ seria de puteri este uniform convergentă pe $[-r, r]$.

Numărul ρ se numeşte raza de convergență a seriei, iar $(-\rho, \rho)$ intervalul de convergență.

Observație. Teorema lui Abel nu spune nimic în legătură cu convergența sau divergența seriei de puteri în punctele din capetele intervalului de convergență.

Teorema 2.4.2 (d'Alembert)

Fie seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$. Dacă $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lambda$ finită sau infinită, atunci raza de convergență a seriei de puteri va fi:

$$\rho = \begin{cases} \frac{1}{\lambda}, & 0 < \lambda < \infty; \\ 0, & \lambda = +\infty; \\ +\infty, & \lambda = 0. \end{cases}$$

Teorema 2.4.3 (Cauchy-Hadamard)

Fie seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$. Dacă $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lambda$ finită sau infinită, atunci raza de convergență a seriei de puteri va fi:

$$\rho = \begin{cases} \frac{1}{\lambda}, & 0 < \lambda < \infty; \\ 0, & \lambda = +\infty; \\ +\infty, & \lambda = 0. \end{cases}$$

Corolar 2.4.4. Suma unei serii de puteri este o funcție continuă pe intervalul de convergență.

Corolar 2.4.5. Suma unei serii de puteri este uniform continuă pe orice interval compact conținut în intervalul de convergență.

Teorema 2.4.6. Fie seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ convergentă în intervalul $(-\rho, \rho)$. Seria formată cu derivatele termenilor săi, $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1}$ va avea același interval de convergență.

Corolar 2.4.7

Dacă $s(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ şi $\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1}$, atunci $s'(x)=\varphi(x)$, $(\forall)\ x\in(-\rho,\rho)$.

Corolar 2.4.8. Suma seriei formată cu derivatele termenilor unei serii de puteri este o funcție continuă şi derivabilă pe intervalul de convergență.

Corolar 2.4.9. Dacă $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ este o serie de puteri cu raza de convergență ρ, atunci:

a) seria formată cu derivatele de ordinul n ale termenilor seriei are aceeaşi rază de convergență;

b) suma s a seriei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ este indefinit derivabilă pe intervalul de convergență şi derivata de ordinul n este egală cu suma seriei derivatelor de ordinul n pentru orice $x\in(-\rho,\rho)$.

Teorema 2.4.10. Dacă $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ este o serie de puteri cu raza de convergență ρ, atunci pentru orice interval închis $[a,b]\subset(-\rho,\rho)$ seria de puteri poate fi integrată termen cu termen şi $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b a_n \cdot x^n\,\mathrm{d}x$, unde $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$.

Exemplu

Seria $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ are raza de convergență $\rho=1$.

Seria derivatelor $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot x^{2n}$ are aceeaşi rază de convergență şi are suma $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$, deci suma seriei inițiale este $s(x)=C+\operatorname{arctg}x$. Pentru $x=0$, $C=0\Rightarrow s(x)=\operatorname{arctg}(x)$.

Operații cu serii de puteri

Fie două serii de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ şi $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot x^n$ cu razele de convergență ρ_1 şi ρ_2. Atunci:

a) suma celor două serii de puteri este tot o serie de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) \cdot x^n$, care are raza de convergență $\rho \geq \min(\rho_1, \rho_2)$. Dacă $A(x), B(x)$ sunt sumele celor două serii de puteri şi $S(x)$ este suma seriei $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) \cdot x^n$, atunci $S(x) = A(x) + B(x),\ (\forall)\ x \in (-\rho, \rho)$;

b) diferența celor două serii de puteri este tot o serie de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n) \cdot x^n$, care are raza de convergență $\rho \geq \min(\rho_1, \rho_2)$; dacă $D(x)$ este suma seriei $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n) \cdot x^n$, atunci $D(x) = A(x) - B(x),\ (\forall)\ x \in (-\rho, \rho)$;

c) produsul celor două serii de puteri este tot o serie de puteri:

$$a_0 \cdot b_0 + (a_0 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_0) \cdot x + \ldots + (a_0 \cdot b_n + a_1 \cdot b_{n-1} + \ldots + a_n \cdot b_0) \cdot x^n + \ldots,$$

care are raza de convergență $\rho \geq \min(\rho_1, \rho_2)$; dacă $P(x)$ este suma seriei produs, atunci $T(x) = A(x) \cdot B(x),\ (\forall)\ x \in (-\rho, \rho)$;

d) câtul a două serii de puteri $A(x)$ şi $B(x)$, $b_0 \neq 0$, este o serie de puteri $C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot x^n$, cu coeficienții definiți de egalitatea $A(x) = B(x) \cdot C(x)$.

Serie Taylor

Fie $f : I \to \mathbb{R}$ o funcție indefinit derivabilă pe intervalul *I* şi fie un punct x_0 interior lui *I*. ***Formula lui Taylor*** pentru funcția *f* ***în punctul*** x_0 este:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} \cdot f'(x_0) + \ldots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} \cdot f^{(n)}(x_0) + R_n(x),\ x \in I.$$

Dacă şirul $(R_n(x))_n$, pentru $x \in X \subset I$ este convergent către zero, atunci seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot f^{(n)}(x_0) \cdot (x - x_0)^n$ numită ***seria Taylor a funcției f în punctul*** x_0 este convergentă pentru $x \in X \subset I$ către funcția *f*.

Formula $f(x)=f(x_0)+\frac{x-x_0}{1!}\cdot f'(x_0)+...+\frac{(x-x_0)^n}{n!}\cdot f^{(n)}(x_0)+...$ se numeşte ***formula de dezvoltare*** a funcţiei *f* ***în serie Taylor*** în jurul punctului x_0.

Teorema 2.4.11. Seria Taylor a funcţiei *f* în jurul punctului x_0 este convergentă într-o vecinătate *V* a lui x_0, dacă derivatele de orice ordin $f^{(n)}$ sunt egal mărginite pe *V*, adică $\left|f^{(n)}(x)\right|<M, \quad (\forall)\, x\in V$.

Observaţie. Dacă $x_0=0$, atunci seria $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot f^{(n)}(x_0)\cdot(x-x_0)^n$ se numeşte ***serie Mac Laurin*** pentru funcţia *f*.

2.5 Aplicaţii

2.5.1 Să se determine mulţimea de convergenţă pentru următoarele serii de puteri:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[1-(-2)^n\right]\cdot x^n$; **b)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n+3^n}$; **c)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^n}$;

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2+n}\cdot x^n$; **e)** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\ln a)^n}{n!}\cdot x^n,\ a>0$;

f) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}\right)\cdot x^n$; **g)** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}\cdot(x-1)^n$;

h) $\sum_{n=1}^{\infty}n^n\cdot(x+3)^n$; **i)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}\cdot(x+3)^n$.

Indicaţie de rezolvare:

a) $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$;

b) $\lambda=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2^n+3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{3^n\left(1+\frac{2^n}{3^n}\right)}}=\frac{1}{3}\Rightarrow\rho=3$ şi intervalul de convergenţă este $(-3,3)$; pentru $x=3$ şi pentru $x=-3$ seria este divergentă, deoarece nu este verificată condiţia necesară de convergenţă a unei serii, deci mulţimea de convergenţă este $(-3,3)$;

c) $\lambda = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{1}{n^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0 \Rightarrow \rho = \infty$ şi deci mulţimea de convergenţă este $\mathbb{R}$;

d) $\left(-\dfrac{1}{\mathrm{e}}, \dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$;

e) $\mathbb{R}$;

f) $(-1,1)$;

g) se consideră seria de puteri $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cdot y^n$, $y = x-1$, şi se obţine mulţimea de convergenţă $(0,2]$;

h) –3;

i) $(-\mathrm{e}-3, \mathrm{e}-3)$.

2.5.2 Să se determine raza de convergenţă pentru seriile de puteri:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, unde $a_{2n} = \dfrac{1}{n}$, $a_{2n-1} = \dfrac{1}{2^{n+1}}$;

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^n}{n!} \cdot x^n$.

Indicaţie de rezolvare:

a) $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lambda$ şi $\rho = \dfrac{1}{\lambda}$; avem

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\frac{1}{n}} = 1,\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n-1]{\frac{1}{2^{n+1}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \lambda = \max\left\{1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\} = 1 \Rightarrow \rho = 1;$$

b) $\rho = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

2.5.3 Dacă raza de convergenţă a seriei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este $\rho \in (0,\infty)$, să se găsească raza de convergenţă a seriilor de puteri următoare:

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^m \cdot x^n$, $m \in \mathbb{N}^*$; **b)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^{nm}$, $m \in \mathbb{N}^*$;

c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{a_n}{1+|a_n|} \cdot x^n$.

Indicație de rezolvare:

a) $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|\Rightarrow\rho_1=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n^m}{a_{n+1}^m}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|^m=\rho^m$;

b) se notează $y=x^m$, rezultă că seria de puteri $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n y^n$ are raza de convergență ρ, deci seria este absolut convergentă pentru $|y|<\rho\Rightarrow\left|x^m\right|<\rho\Rightarrow$ $|x|^m<\rho\Rightarrow|x|<\sqrt[m]{\rho}$, deci raza de convergență a seriei $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\cdot x^{nm}$, $m\in\mathbb{N}^*$ este $\rho_1=\sqrt[m]{\rho}$;

c) $\rho_1=\max(\rho,1)$.

2.5.4 Să se determine mulțimea de convergență și suma următoarelor serii de puteri:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{x^n}{n}$; **b)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$;

c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{3n+1}}{3n+1}$; **d)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)\cdot x^n$;

e) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot(2n-1)\cdot x^{2n-2}$; **f)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-3}}{4n-3}$;

g) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)(n+3)\cdot x^n$;

h) $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a(a-1)...(a-n+1)}{n!}\cdot x^n$, $a\in\mathbb{R}$.

Indicație de rezolvare:

a) se calculează raza de convergență a seriei de puteri.

$\lambda=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1\Rightarrow\rho=\frac{1}{\lambda}=1$. Intervalul de convergență este $(-1,1)$.

Se studiază convergența în capetele intervalului.

Pentru $x=1$, se obține seria numerică alternată $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}$, care este convergentă, iar pentru $x=-1$ se obține seria $-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, care este divergentă.

Deci, mulțimea de convergență a seriei este $(-1,1]$.

Fie $f(x)$ suma seriei de puteri.

Atunci $f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot x^{n-1}=\frac{1}{1+x},\ |x|<1$.

Prin integrare, se obține $f(x)=\ln(1+x)+C,\ x\in(-1,1)$. Pentru determinarea constantei de integrare C, se consideră $x=0$, de unde se obține $C=0$. Prin urmare, $f(x)=\ln(1+x),\ x\in(-1,1)$.

Deoarece seria de puteri este convergentă şi în punctul $x=1$, rezultă că funcția $f(x)$ este continuă în acest punct şi $f(1)=\lim_{x\to 1}\ln(1+x)=\ln 2$;

b) mulțimea de convergență este $[-1,1]$. Fie $f(x)$ suma seriei de puteri. Atunci $f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\cdot x^{2n}=\frac{1}{1+x^2},\ |x|<1$. Deci, $f(x)=\operatorname{arctg} x+C$ şi pentru $x=0$ se va obține $C=0$, deci suma seriei de puteri este $f(x)=\operatorname{arctg} x$, $x\in(-1,1)$. Cum seria de puteri este convergentă şi în capetele intervalului de convergență, rezultă $f(-1)=\operatorname{arctg}(-1)=-\frac{\pi}{4}$ şi $f(1)=\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}$;

c) mulțimea de convergență este $(-1,1]$. Notând cu $f(x)$ suma seriei de puteri, rezultă $f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\cdot x^{3n}=\frac{1}{1+x^3}$, de unde

$$f(x)=\int\frac{1}{1+x^3}\mathrm{d}x=\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+\frac{\pi}{6\sqrt{3}};$$

d) mulțimea de convergență este $(-1,1)$. Pentru calculul sumei seriei de puteri se pleacă de la seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}$, care are suma

$$g(x)=\frac{x}{1-x}\Rightarrow g'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{n},$$

rezultă că suma seriei de puteri este $f(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$;

e) mulțimea de convergență este $(-1,1)$; suma seriei de puteri este $f(x)=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$;

f) mulțimea de convergență este $(-1,1)$; suma seriei de puteri este $f(x)=\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x-\frac{1}{4}\ln\frac{1-x}{1+x}$;

g) mulțimea de convergență este $(-1,1)$; pentru calculul sumei seriei de puteri, se pleacă de la seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+3}$, care are suma:

$$g(x)=\frac{x^3}{1-x}\Rightarrow g'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+3)x^{n+2},\ g''(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+3)x^{n+1}$$

şi $g'''(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)(n+3)\cdot x^n=f(x)$, se obține astfel suma seriei de puteri $f(x)=\frac{6}{(1-x)^4}$;

h) intervalul de convergență este $(-1,1)$; pentru $x=1$, se obține seria $1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot a(a-1)...(a-n+1)$, care este absolut convergentă pentru $a\geq 0$ şi semiconvergentă pentru $a\in(-1,0)$.

Pentru $x=-1$, se obține seria $1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot(-a)(1-a)...(n-a-1)$, care este absolut convergentă pentru $a\geq 0$.

Prin urmare, dacă $a>0$, $a\in$ □ mulțimea de convergență este $[-1,1]$.

Dacă $a\in(-1,0)$, mulțimea de convergență este $(-1,1]$.

Dacă $a\leq -1$, mulțimea de convergență este $(-1,1)$.

Dacă $a=0$ sau a este număr natural, mulțimea de convergență este □ .

Fie $f(x)$ suma seriei de puteri pe $(-1,1)$. Prin derivare obținem:

$$f'(x)=a+\frac{a(a-1)}{1!}\cdot x+...+\frac{a(a-1)...(a-n+1)}{(n-1)!}\cdot x^{n-1}+....$$

Înmulțind această relație cu x şi adunând rezultatul la $f'(x)$, vom obține:

$$x\cdot f'(x)+f'(x)=a\cdot\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(a-1)...(a-n+1)}{n!}\cdot x^n\right]=a\cdot f(x)\Rightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{a}{1+x},$$

de unde rezultă $\ln|f(x)|=a\ln(1+x)+C$, $|x|<1$. Pentru $x=0$, rezultă $C=0$, deci suma seriei este $f(x)=(1+x)^a$, $x\in(-1,1)$.

2.5.5 Să se demonstreze că seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$ este convergentă pentru orice $x\in[-1,1]$, iar suma ei f verifică ecuația

$$(1-x)\cdot f'(1-x)-x\cdot f'(x)=\ln\frac{1-x}{x},\ x\in(0,1).$$

Indicație de rezolvare:

$\lambda=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1\Rightarrow\rho=1$, deci intervalul de convergență este $(-1,1)$.

Pentru $x=1$, se obține seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, care este convergentă.

Pentru $x=-1$, se obține seria alternată $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$, convergentă, cu Leibniz.

Deci, mulțimea de convergență este $[-1,1]$.

Se consideră $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}\Rightarrow f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n}\Rightarrow x\cdot f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$.

Fie $g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\Rightarrow g'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x},\ x\in(0,1)$.

Rezultă că $g(x)=-\ln(1-x)$.

$x\cdot f'(x)=-\ln(1-x)\Rightarrow(1-x)\cdot f'(1-x)=-\ln x$ şi se verifică ecuația dată.

2.5.6 Să se arate că seria de puteri $1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot x^{3n}}{2\cdot3\cdot5\cdot6\cdot\ldots\cdot(3n-1)(3n)}$ este convergentă pe $\mathbb{R}$ şi că suma ei verifică ecuația

$$f''(x)+x\cdot f(x)=0,\ (\forall)\ x\in\mathbb{R}.$$

Indicație de rezolvare:

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=0\Rightarrow\rho=\infty$, deci seria de puteri este convergentă pe $\mathbb{R}$.

Notându-se cu $f(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot x^{3n}}{2\cdot3\cdot5\cdot6\cdot\ldots\cdot(3n-1)(3n)}$, rezultă

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot x^{3n-1}}{2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(3n-1)}=-\frac{x^2}{2}+\frac{x^5}{2\cdot 3\cdot 5}-\ldots\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''(x)=-x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{3n-2}}{2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(3n-3)}$$

şi prin înlocuire se verifică ecuaţia dată.

2.5.8 Să se determine o serie de puteri convergentă pe $\mathbb{R}$ şi astfel încât suma f a ei să verifice ecuaţia

$$x\cdot f''(x)+f'(x)+x\cdot f(x)=0,\ (\forall)\ x\in\mathbb{R}.$$

Indicaţie de rezolvare:

Se caută f de forma $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot x^n$. Derivând de două ori termen cu termen, obţinem:

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot a_n\cdot x^{n-1}\quad\text{şi}\quad f''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n\cdot x^{n-2},$$

pe care înlocuindu-le în ecuaţia ce trebuie verificată, rezultă identitatea

$$a_1+\sum_{n=2}^{\infty}\left(n^2a_n+a_{n-2}\right)\cdot x^{n-1}=0,\ (\forall)\ x\in\mathbb{R}.$$

De aici rezultă că $a_1=0,\ n^2\cdot a_n+a_{n-2}=0,\ n=2,3,\ldots$, adică

$$a_{2k-1}=0\ \text{şi}\ a_{2k}=(-1)^k\cdot\frac{a_0}{4^k\cdot(k!)^2},\ k\in\mathbb{N}.$$

Pentru $a_0=1\Rightarrow 1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\cdot\frac{x^{2k}}{4^k\cdot(k!)^2}$, care este o serie de puteri convergentă pe $\mathbb{R}$.

2.5.9 Se notează razele de convergenţă ale seriilor de puteri $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, $\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$, $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$, $\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot b_nx^n$ şi $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}a_{n-k}\cdot b_k\right)\cdot x^n$ prin $R_a,\ R_b,\ R_{a+b},\ R_{a\cdot b},\ R_{a\otimes b}$.

Să se arate că:

a) $R_{a+b} \geq \min(R_a, R_b)$;

b) $R_{a \cdot b} = R_a \cdot R_b$;

c) $R_{a \otimes b} \geq \min(R_a, R_b)$.

Indicație de rezolvare:

a) seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ are raza de convergență R_a, deci ea este absolut convergentă pentru $|x| < R_a$. Similar, seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ este absolut convergentă pentru $|x| < R_b$.

Fie $r_0 \leq R_a$, $r_0 \leq R_b$. Atunci, pentru orice x care respectă condiția $|x| < r_0$ se verifică:

$$\left|(a_{n+1} + b_{n+1}) \cdot x^{n+1} + \ldots + (a_{n+p} + b_{n+p}) \cdot x^{n+p}\right| \leq |a_{n+1}||x|^{n+1} + \ldots + |a_{n+p}||x|^{n+p} +$$

$$+|b_{n+1}||x|^{n+1} + \ldots + |b_{n+p}||x|^{n+p} < \varepsilon.$$

S-a demonstrat astfel că seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$ este absolut convergentă pentru orice x pentru care $|x| < r_0$, deci $R_{a+b} \geq \min(R_a, R_b)$.

b) $R_{a \cdot b} = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_n b_n}{a_{n+1} b_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{b_n}{b_{n+1}}\right| = R_a \cdot R_b$;

c) Se procedează ca la punctul a).

Fie $r_0 \leq R_a$, $r_0 \leq R_b$, atunci pentru orice x care respectă condiția $|x| < r_0$ se verifică:

$$\left|\sum_{q=n+1}^{n+p} \left(\sum_{k=0}^{q} a_{q-k} \cdot b_k\right) \cdot x^q\right| \leq \sum_{q=n+1}^{n+p} \left|\sum_{k=0}^{q} a_{q-k} \cdot b_k\right| \cdot |x|^q \leq$$

$$\leq \sum_{q=n+1}^{n+p} \left(\sum_{k=0}^{q} |a_{q-k}||b_k|\right) \cdot |x|^q = \left(\sum_{m=n+1}^{n+p} |a_m| \cdot |x|^m\right) \cdot \left(\sum_{s=n+1}^{n+p} |b_s| \cdot |x|^s\right) \leq \varepsilon^2.$$

S-a demonstrat astfel că seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} \cdot b_k\right) \cdot x^n$ este absolut convergentă pentru orice x pentru care $|x| < r_0$, deci $R_{a \otimes b} \geq \min(R_a, R_b)$.

TEST DE AUTOEVALUARE

1 Fie un polinom $P \in \mathbb{R}[X]$. Să se calculeze suma seriei de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} P(n) \cdot \frac{x^n}{n!},\ x \in \mathbb{R}$.

2 Să se arate că funcțiile:

a) $f(x) = \sin x,\ x \in \mathbb{R}$;

b) $g(x) = \cos x,\ x \in \mathbb{R}$;

c) $h(x) = \mathrm{e}^x,\ x \in \mathbb{R}$, se pot dezvolta în serie de puteri pe $\mathbb{R}$ şi să se determine seriile Mac Laurin corespunzătoare.

3 Să se arate că funcțiile următoare se pot dezvolta în serie de puteri şi să se găsească dezvoltarea, precizându-se intervalul în care aceasta este adevărată:

a) $f(x) = (1+x)^a,\ x > -1,\ a \in \mathbb{R} \setminus \{0,1,2,...\}$;

b) $f(x) = \arcsin x,\ x \in [-1,1]$.

4 Să se demonstreze inegalitatea $\mathrm{e}^x > \frac{(n+1)^n}{n!},\ (\forall)\ n \in \mathbb{N}$.

5 Să se calculeze, utilizând formula lui Taylor, limita

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}.$$

TEMĂ DE CONTROL

1 Să se demonstreze că seriile următoare sunt convergente pe mulțimile indicate, iar sumele lor sunt funcții continue pe aceste mulțimi:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{\sqrt{n^4+x^2}},\ x\in\mathbb{R}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2},\ x\in\mathbb{R}$;

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x},\ 0\le x<\infty$, unde seria numerică $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ este absolut convergentă.

2 Este posibil ca o serie de funcții continue pe o mulțime X să conveargă neuniform pe această mulțime către o funcție continuă?

3 Este posibilă derivarea termen cu termen a seriilor:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[\mathrm{e}^{-nx^2}-\mathrm{e}^{-(n-1)x^2}\right],\ x\in[0,1]$;

b) $\displaystyle\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1}{2n}\ln\left(1+n^4x^2\right)-\frac{1}{2(n-1)}\ln\left(1+(n-1)^4x^2\right)\right],\ x\in[0,1]$?

4 Este posibilă integrarea termen cu termen a seriei:

$$\sum_{n=1}^{\infty}2x\left[n^2\,\mathrm{e}^{-n^2x^2}-(n-1)^2\,\mathrm{e}^{-(n-1)^2x^2}\right],\ x\in[0,1]?$$

5 Să se arate că seria $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(x^n-x^{2n}-x^{n-1}+x^{2n-2}\right)$ converge neuniform pe $[0,1]$ şi totuşi

$$\int_0^1\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(x^n-x^{2n}-x^{n-1}+x^{2n-2}\right)\right]\mathrm{d}\,x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\left(x^n-x^{2n}-x^{n-1}+x^{2n-2}\right)\mathrm{d}\,x.$$

6 Fie seria de puteri $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n+1}$.

a) Să se determine mulţimea de convergenţă şi să se calculeze suma ei.

b) Să se arate că suma seriei de puteri, *S*, verifică ecuaţia diferenţială $x \cdot S'(x)+S(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$ şi ecuaţia funcţională $S\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)=\left(1+x^2\right)\cdot S(x)$.

7 Să se dezvolte în serie de puteri următoarele funcţii:

a) $f(x)=\dfrac{8-2x}{x^2-8x+15}$;

b) $f(x)=\dfrac{2-x-x^2}{(1-x)\left(1-x^2\right)}$;

c) $f(x)=\ln\left(2-3x+x^2\right)$;

d) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

e) $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$;

f) $f(x)=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$;

g) $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$;

h) $f(x)=\dfrac{1-x\cos\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}$;

i) $f(x)=\dfrac{1-x^2}{1-2x\cos\alpha+x^2}$.

8 Folosind dezvoltarea în serie de puteri a funcţiilor de sub integrale, să se demonstreze:

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{12}$;

b) $\displaystyle\lim_{\alpha \to 0}\int_0^{1-\alpha} \frac{\ln(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x=-\frac{\pi^2}{6}$.

BIBLIOGRAFIE RECOMANDATĂ PENTRU MODULUL 2

1. **I. Colojoară**, *Analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983
2. **M. Craiu, V. V. Tănase**, *Analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1980
3. **M. Craiu, M. Roşculeț**, *Culegere de probleme de analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1976
4. **N. Donciu, D. Flondor**, *Algebră şi analiză matematică*. Culegere de probleme, vol. I, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1978
5. **I. P. Elianu**, *Principii de analiză matematică*. Calcul diferențial, Editura Academiei Militare, Bucureşti, 1976
6. **P. Flondor, O. Stănăşilă**, *Lecții de analiză matematică*, Editura ALL, 1993
7. **M. Nicolescu, N. Dinculeanu, S. Marcus**, *Manual de Analiză matematică*, vol. I, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1966
8. **M. Roşculeț**, *Analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1973
9. **M. Roşculeț**, *Culegere de probleme de analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1968
10. **I. Sprințu**, *Elemente de analiză matematică*, Editura Academiei Tehnice Militare, Bucureşti, 2001
11. **O. Stănăşilă**, *Analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981

MODULUL 3

CALCUL DIFERENŢIAL ÎN $\mathbb{R}^n$

În acest modul sunt prezentate, pe parcursul a două lecţii, principalele noţiuni teoretice referitoare la limite de funcţii vectoriale de variabilă vectorială, continuitatea şi diferenţiabilitatea funcţiilor vectoriale de variabilă vectorială, funcţii implicite, dependenţă funcţională, extremele libere şi condiţionate ale funcţiilor de mai multe variabile, precum şi algoritmii cei mai des întâlniţi pentru rezolvarea problemelor specifice referitoare la tematica acestui modul.

După parcurgerea celor două lecţii din cuprinsul modulului studenţii vor dobândi cunoştinţele teoretice şi îşi vor forma deprinderile practice cu ajutorul cărora vor putea recunoaşte, înţelege şi rezolva probleme specifice referitoare la tematica anunţată anterior.

Materialul trebuie parcurs în ordinea sa firească prezentată în cuprinsul modulului, inclusiv în porţiunea referitoare la aplicaţii. Metoda de studiu va fi cea specifică disciplinelor matematice, cu utilizarea expresă a adnotărilor făcute cu creionul pe tot parcursul textului. Pentru fiecare tip de exerciţiu se recomandă identificarea algoritmului şi descompunerea acestuia în etape succesive. Se recomandă studierea soluţiilor problemelor rezolvate şi rezolvarea completă a problemelor propuse în testele de autoevaluare şi în tema de control propusă.

Timpul mediu necesar parcurgerii şi însuşirii noţiunilor teoretice, algoritmilor de rezolvare a problemelor, formării deprinderilor practice de rezolvare şi dobândirii competenţelor enumerate anterior este de aproximativ 6-8 ore de studiu pentru fiecare lecţie, într-un ritm de 2-3 ore pe zi.

LECȚIA 1

3.1 Funcții vectoriale. Limite. Continuitate

Definiția 3.1.1. O funcție $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^n$, se numeşte ***funcție reală de variabilă vectorială*** $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in X$.

Definiția 3.1.2. Fie *m* funcții reale $f_1, f_2, ..., f_m$ definite pe o aceeaşi mulțime $X \subset \mathbb{R}^n$. Corespondența:

$$(x_1, x_2, ..., x_n) \to (f_1(x_1, x_2, ..., x_n), f_2(x_1, x_2, ..., x_n), ..., f_m(x_1, x_2, ..., x_n))$$

defineşte o funcție $f = (f_1, f_2, ..., f_m)$ pe $X \subset \mathbb{R}^n$ cu valori în $\mathbb{R}^m$. Se spune că *f* este o ***funcție vectorială de variabilă vectorială***.

Definiția 3.1.3. Fie funcția $f : X \to \mathbb{R}^m$, $X \subset \mathbb{R}^n$ şi *a* un punct de acumulare al mulțimii *X*. Se spune că un vector $b \in \mathbb{R}^m$ este ***limita funcției f în punctul*** *a* dacă pentru $(\forall)\ \varepsilon > 0$, $(\exists)\ \delta(\varepsilon) > 0$, astfel încât pentru $(\forall)\ x \in X$, $x \neq a$, cu $\|x - a\| < \delta(\varepsilon)$ să avem $\|f(x) - b\| < \varepsilon$.

Notație: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

Definiția 3.1.4. Fie funcția $f : X \to \mathbb{R}^m$, $X \subset \mathbb{R}^n$ şi $a \in X$. Se spune că funcția *f* este ***continuă în punctul*** *a* dacă pentru $(\forall)\ \varepsilon > 0$, $(\exists)\ \delta(\varepsilon) > 0$, astfel încât pentru $(\forall)\ x \in X$, cu $\|x - a\| < \delta(\varepsilon)$ să avem $\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$.

Dacă *a* este punct de acumulare al mulțimii *X*, atunci continuitatea funcției *f* în *a* este echivalentă cu:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \text{ sau } \lim_{x \to a} \|f(x) - f(a)\| = 0.$$

Observații:

1) Dacă *f* este continuă în punctul *a*, există o vecinătate a lui *a* în care funcția este mărginită.

2) Dacă *f* este continuă în punctul *a*, atunci funcția $\|f\|$ este continuă în punctul *a*. Reciproca nu este adevărată în general.

3) Dacă *f* şi *g* sunt continue în punctul *a*, funcțiile $f+g$ şi $\lambda \cdot f$ sunt continue în *a*.

4) Dacă există $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ în $\mathbb{R}^m$ şi *f* nu este definită în punctul *a*, atunci *f* se poate prelungi prin continuitate în punctul *a*, punând condiția $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.

5) Fie funcțiile $f: X \to Y \subset \mathbb{R}^m$, $g: Y \to \mathbb{R}^p$, $X \subset \mathbb{R}^n$. Dacă funcția *f* este continuă în punctul $a \in X$, iar funcția *g* este continuă în punctul $b=f(a) \in Y$, atunci funcția compusă $g \circ f: X \to \mathbb{R}^p$ este continuă în punctul $a \in X$.

6) Fie funcția reală $f: X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^n$. Dacă *f* este continuă în punctul $a \in X$ şi $f(a) \neq 0$, există o vecinătate *V* a lui *a*, astfel încât pentru $x \in V \cap X$ să avem $f(x) \cdot f(a) > 0$.

7) Fie funcția vectorială $f: X \to \mathbb{R}^m$, $X \subset \mathbb{R}^n$ continuă în punctul $a \in X$ şi $f(a) \neq 0$. Atunci există o vecinătate *V* a lui *a*, astfel încât pentru $x \in V \cap X$ să avem $f(x) \neq 0$.

Definiția 3.1.5. Fie $f: X \to \mathbb{R}^m$, $X \subset \mathbb{R}^n$ şi $a \in X$. Fie submulțimea $X_i = \{x_i \in \mathbb{R} \,|\, (a_1, a_2, ..., a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, ..., a_n) \in X\} \subset X$. Pe aceasta, funcția *f* este o funcție f_i de o singură variabilă $x_i \in X_i$. Dacă f_i este continuă în punctul $a_i \in X_i$, spunem că *f* este ***continuă parțial în raport cu variabila*** x_i în punctul $a=(a_1, a_2, ..., a_n)$.

Teorema 3.1.6. O funcție *f* continuă într-un punct $a=(a_1, a_2, ..., a_n)$ este continuă în acest punct în raport cu fiecare variabilă.

Observație. Reciproca acestei teoreme nu este în general adevărată. Dacă o funcție este continuă într-un punct în raport cu fiecare variabilă în parte, nu rezultă că ea este continuă în acel punct.

Exemplu

Fie funcția $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definită prin:

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{3xy^6}{x^2+y^{12}}, & (x,y)\neq(0,0); \\ 0, & (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

Dacă $x=0 \Rightarrow \lim_{y\to 0} f(0,y)=0$, deci funcția *f* este continuă în raport cu variabila *y* în punctul $(0,0)$.

Dacă $y=0 \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x,0)=0$, deci funcția *f* este continuă în raport cu variabila *x* în punctul $(0,0)$.

În acelaşi timp, funcția *f* nu este continuă în punctul $(0,0)$, deoarece pentru $x\to 0,\ y\to 0,$ cu $y^6=m\cdot x,\ m\in\mathbb{R} \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\frac{3m}{1+m^2}$, limită care depinde de parametrul real *m*, deci nu este unică.

Definiția 3.1.7. Fie $f: X\to\mathbb{R}^m,\ X\subset\mathbb{R}^n$. Se spune că *f* este ***uniform continuă*** pe *X*, dacă pentru $(\forall)\ \varepsilon>0,\ (\exists)\ \delta(\varepsilon)>0$, astfel încât oricare ar fi punctele $x,\ x'\in X$ cu $\|x-x'\|<\delta(\varepsilon)$ să avem $\|f(x)-f(x')\|<\varepsilon$.

Teorema 3.1.8. O funcție *f* uniform continuă pe o mulțime *X* este uniform continuă în raport cu fiecare variabilă.

Observații:

1) O funcție vectorială continuă pe un interval compact $I\subset\mathbb{R}^n$ este mărginită pe *I*.

2) O funcție vectorială continuă pe un interval compact $I\subset\mathbb{R}^n$ este uniform continuă pe *I*.

3) Pentru o funcție vectorială continuă pe un interval compact $I\subset\mathbb{R}^n$ există un punct $\xi\in I$, astfel încât $\|f(\xi)\|=\sup_{x\in I}\|f(x)\|$.

4) O funcție reală de variabilă vectorială, continuă pe un interval compact $I\subset\mathbb{R}^n$, îşi atinge marginile.

Exemple

1) Fie funcția $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ definită pe discul $x^2+y^2\le R^2$. Aceasta este continuă pe domeniul ei de definiție. Minimul funcției este atins în punctul $(0,0)$ şi are valoarea 0, iar maximul funcției este atins în orice punct (x,y) situat pe cercul de ecuație $x^2+y^2=R^2$ şi are valoarea *R*.

2) Funcția $f(x,y)$ definită pe discul $x^2+y^2\le R^2$ prin:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3xy^6}{x^2+y^{12}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

nu este uniform continuă pe domeniul de definiție, deoarece nu este continuă în punctul $(0,0)$.

Observație. Vom particulariza, în continuare, noțiunea de continuitate uniformă pe $\mathbb{R}$.

Definiția 3.1.9. Fie $f:X\to\mathbb{R}$, $X\subset\mathbb{R}$. Se spune că f este ***uniform continuă*** pe X, dacă pentru $(\forall)\ \varepsilon>0$, $(\exists)\ \delta(\varepsilon)>0$, astfel încât oricare ar fi punctele $x,\ x'\in X$ cu $|x-x'|<\delta(\varepsilon)$ să avem $|f(x)-f(x')|<\varepsilon$.

Criteriul Cauchy-Bolzano

Fie $f:X\to\mathbb{R}$, $X\subset\mathbb{R}$ și a un punct de acumulare pentru mulțimea X. Atunci există $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ dacă și numai dacă pentru $(\forall)\ \varepsilon>0$, $(\exists)\ \delta(\varepsilon)>0$, astfel încât pentru $(\forall)\ x',\ x''\in X$, care verifică $|x'|<\delta(\varepsilon)$, $|x''|<\delta(\varepsilon)$, să avem $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

3.2 Derivate parțiale. Diferențiale

Definiția 3.2.1. Fie funcția $f:X\to\mathbb{R}$, $X\subset\mathbb{R}^2$ și (a,b) un punct interior lui X. Se spune că:

a) f este ***derivabilă parțial*** în (a,b), ***în raport cu variabila*** x, dacă: $(\exists)\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a}<+\infty$, iar limita se numește ***derivata parțială*** a lui f ***în raport cu*** x și se notează $f'_x(a,b)$ sau $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)$;

b) f este ***derivabilă parțial*** în (a,b), ***în raport cu variabila*** y, dacă: $(\exists)\lim\limits_{y\to b}\dfrac{f(a,y)-f(a,b)}{y-b}<+\infty$, iar limita se numește ***derivata parțială*** a lui f ***în raport cu*** y și se notează $f'_y(a,b)$ sau $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)$.

Observație. Dacă o funcție este derivabilă parțial în raport cu variabila x în fiecare punct al mulțimii de definiție X, spunem că funcția este derivabilă parțial în raport cu x pe mulțimea X.

Exemplu

Funcția $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \mathrm{e}^{x^2+y^2}$ este derivabilă parțial în raport cu x şi cu y pe $\mathbb{R}^2$ şi $f'_x(x,y) = 2x \cdot \mathrm{e}^{x^2+y^2}$, $f'_y(x,y) = 2y \cdot \mathrm{e}^{x^2+y^2}$.

Definiția 3.2.2. Fie funcția $f: X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^n$ şi $(a_1, a_2, ..., a_n)$ un punct interior lui *X*. Funcția *f* este ***derivabilă parțial în punctul*** $(a_1, a_2, ..., a_n)$ ***în raport cu variabila*** x_k dacă:

$$(\exists) \quad \lim_{x \to x_k} \frac{f(a_1, a_2, ..., a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, ..., a_n) - f(a_1, a_2, ..., a_n)}{x_k - a_k}$$

şi este finită.

Limita se numeşte ***derivata parțială a lui f în raport cu variabila*** x_k şi se notează $f'_{x_k}(a_1, a_2, ..., a_n)$ sau $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a_1, a_2, ..., a_n)$.

O funcție $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ are *n* derivate parțiale.

Exemplu

Funcția $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = \ln\left(1 + x^2 \cdot y^2 \cdot z^2\right)$ are derivatele parțiale:

$$f'_x(x,y,z) = \frac{2x \cdot y^2 \cdot z^2}{1 + x^2 \cdot y^2 \cdot z^2},\ f'_y(x,y,z) = \frac{2y \cdot x^2 \cdot z^2}{1 + x^2 \cdot y^2 \cdot z^2},$$

$$f'_z(x,y,z) = \frac{2z \cdot y^2 \cdot x^2}{1 + x^2 \cdot y^2 \cdot z^2},\ (\forall)\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

Observații

1) Dacă funcția reală $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ este derivabilă parțial în raport cu variabila x_k în punctul $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$, atunci *f* este continuă parțial în raport cu variabila x_k în punctul *a*.

2) Dacă funcția reală $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ este derivabilă parțial în raport cu fiecare variabilă $x_1, x_2, ..., x_n$ în punctul $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$, atunci *f* este continuă în raport cu fiecare variabilă în parte în punctul *a*.

Definiția 3.2.3. Fie funcția vectorială $f: X \to \mathbb{R}^m$, $X \subset \mathbb{R}^n$, componentele sale $f_1, f_2, ..., f_m$ fiind funcții reale derivabile parțial în raport cu fiecare variabilă $x_1, x_2, ..., x_n$ într-un punct $(a_1, a_2, ..., a_n) \in X$.

Derivata parțială a funcției f în raport cu x_k ***în punctul*** a este definită prin:

$$\lim_{x_k \to a_k} \frac{f(a_1, a_2, ..., a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, ..., a_n) - f(a_1, a_2, ..., a_n)}{x_k - a_k}$$

şi se notează cu $f'_{x_k}(a)$.

Observație

Dacă se consideră funcția f raportată la o bază $e_1, e_2, ..., e_m$, atunci:

$$f(x) = e_1 \cdot f_1(x) + e_2 \cdot f_2(x) + ... + e_m \cdot f_m(x), \; x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Derivata sa parțială $f'_{x_k}(a)$ are componentele:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_k}(a_1, a_2, ..., a_n), \; \frac{\partial f_2}{\partial x_k}(a_1, a_2, ..., a_n), ..., \; \frac{\partial f_m}{\partial x_k}(a_1, a_2, ..., a_n).$$

Exemplu

Funcția vectorială $\vec{f}(\vec{r}) = \vec{i} \cdot \frac{x}{y^2 + z^2 + 1} + \vec{j} \cdot \frac{y}{z^2 + x^2 + 1} + \vec{k} \cdot \frac{z}{x^2 + y^2 + 1}$ definită pe $\mathbb{R}^3$ are derivatele parțiale de forma:

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial x}(\vec{r}) = \vec{i} \cdot \frac{1}{y^2 + z^2 + 1} + \vec{j} \cdot \frac{-2xy}{\left(x^2 + z^2 + 1\right)^2} + \vec{k} \cdot \frac{-2xz}{\left(x^2 + y^2 + 1\right)^2};$$

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial y}(\vec{r}) = \vec{i} \cdot \frac{-2xy}{\left(y^2 + z^2 + 1\right)^2} + \vec{j} \cdot \frac{1}{\left(x^2 + z^2 + 1\right)} + \vec{k} \cdot \frac{-2yz}{\left(x^2 + y^2 + 1\right)^2};$$

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial z}(\vec{r}) = \vec{i} \cdot \frac{-2xz}{\left(y^2 + z^2 + 1\right)^2} + \vec{j} \cdot \frac{-2yz}{\left(x^2 + z^2 + 1\right)^2} + \vec{k} \cdot \frac{1}{\left(x^2 + y^2 + 1\right)}.$$

Derivate parțiale de ordin superior. Fie funcția $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^2$, derivabilă parțial în raport cu fiecare variabilă în parte, în punctele interioare ale lui *X*. Dacă $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ şi $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ sunt, la rândul lor, derivabile parțial în raport cu fiecare dintre variabile, atunci derivatele lor parțiale se numesc ***derivate parțiale de ordinul doi*** ale lui f şi se notează prin:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=f''_{xx},\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=f''_{yy},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=f''_{xy},\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=f''_{yx}.$$

Exemplu

Funcția $f(x,y)=\ln\left(1+x^2+y^2\right)$ definită pe $\mathbb{R}^2$ are derivatele parțiale:

$$f'_x(x,y)=\frac{2x}{1+x^2+y^2},\ f'_y=\frac{2y}{1+x^2+y^2},$$

$$f''_{xx}(x,y)=\frac{2}{1+x^2+y^2}-\frac{4x^2}{\left(1+x^2+y^2\right)^2},$$

$$f''_{yy}(x,y)=\frac{2}{1+x^2+y^2}-\frac{4y^2}{\left(1+x^2+y^2\right)^2},$$

$$f''_{xy}(x,y)=\frac{-4xy}{\left(1+x^2+y^2\right)^2}=f''_{yx}.$$

f''_{xy}, f''_{yx} se numesc ***derivate parțiale mixte de ordinul al doilea***.

Criteriul lui Schwarz. Fie $f:X\to\mathbb{R}$, $X\subset\mathbb{R}^2$ şi punctul $(x_0,y_0)\in X$. Dacă există $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ într-o vecinătate *V* a lui (x_0,y_0) şi sunt continue în (x_0,y_0), atunci $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0,y_0)$.

Definiția 3.2.4. $f:X\to\mathbb{R}$, $X\subset\mathbb{R}^2$ şi (a,b) un punct interior al lui *X*. Atunci funcția *f* este ***diferențiabilă în punctul*** (a,b), dacă există $\lambda,\ \mu\in\mathbb{R}$ şi există o funcție $\omega:X\to\mathbb{R}$ continuă şi nulă în (a,b), astfel încât:

$$f(x,y)-f(a,b)=\lambda\cdot(x-a)+\mu\cdot(y-b)+\omega(x,y)\cdot\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2},$$

pentru $(\forall)$ $(x,y)\in X$.

Observație. Dacă f este diferențiabilă în punctul (a,b), atunci f admite derivate parțiale de ordinul întâi în (a,b) şi $\lambda = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$, $\mu = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$.

Definiția 3.2.5. Fie funcția $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^2$ şi (a,b) un punct interior lui X, astfel încât funcția f admite derivate parțiale continue în (a,b).

$\mathrm{d}f(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \cdot \mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \cdot \mathrm{d}y$ se numeşte ***diferențiala de ordinul I a funcției f în punctul*** (a,b).

Definiția 3.2.6. Operatorul $\mathrm{d} = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \mathrm{d}x + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \mathrm{d}y$ care aplicat funcției f dă diferențiala funcției f în punctul (x,y) se numeşte ***operatorul de diferențiere***.

Criteriul lui Young. Fie $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^2$ şi punctul $(x_0, y_0) \in X$. Dacă există derivatele parțiale $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ într-o vecinătate V a punctului (x_0, y_0) şi sunt diferențiabile în (x_0, y_0), atunci $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$.

Observații:

1) Pentru o funcție $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^n$ ***diferențiala*** de ordinul întâi este:

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \mathrm{d}x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \mathrm{d}x_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \mathrm{d}x_n,$$

iar ***operatorul de diferențiere*** de ordinul întâi este:

$$\mathrm{d} = \frac{\partial}{\partial x_1} \cdot \mathrm{d}x_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \cdot \mathrm{d}x_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n} \cdot \mathrm{d}x_n.$$

2) Pentru o funcție vectorială $f : X \to \mathbb{R}^m$, $X \subset \mathbb{R}^n$, ***diferențiala*** este:

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \mathrm{d}x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \mathrm{d}x_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \mathrm{d}x_n.$$

Exemplu

Funcția $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ este derivabilă parțial pe $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ şi:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

de unde rezultă

$$\mathrm{d}f=\frac{x\cdot \mathrm{d}x+y\cdot \mathrm{d}y+z\cdot \mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

diferențiala funcției f pe $\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$.

Definiția 3.2.7. Diferențiala unei funcții de mai multe variabile se numeşte ***diferențiala totală*** a funcției.

Teorema 3.2.8. Condiția necesară şi suficientă pentru ca diferențiala unei funcții $f:I\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ să fie identic nulă pe *I* este ca f să fie constantă pe *I*.

Teorema 3.2.9. Fie expresia diferențială $E=P(x,y)\cdot \mathrm{d}x+Q(x,y)\cdot \mathrm{d}y$, unde funcțiile *P* şi *Q* sunt continue pe $I\subset\mathbb{R}^2$.

Dacă *E* este diferențiala unei funcții $f:I\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, pentru orice punct $(x,y)\in I$, atunci:

$$P(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x},\ Q(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y},\ (\forall)\ (x,y)\in I.$$

Teorema 3.2.10. Condiția necesară şi suficientă pentru ca diferențiala unei funcții $f:I\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ să fie identic nulă pe *I* este ca *f* să fie constantă pe intervalul *I*.

Teorema 3.2.11. Fie expresia diferențială

$$P_1(x_1,...,x_n)\cdot \mathrm{d}x_1+P_2(x_1,...,x_n)\cdot \mathrm{d}x_2+...+P_n(x_1,...,x_n)\cdot \mathrm{d}x_n$$

cu funcțiile componente $P_k(x_1,...,x_n),\ k=1,2,...,n,$ continue pe $I\subset\mathbb{R}^n$. Dacă expresia diferențială este diferențiala unei funcții $f:I\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, pentru orice $(x_1,...,x_n)\in I$, atunci $P_1(x_1,...,x_n)=\frac{\partial f}{\partial x_1},...,\ P_n(x_1,...,x_n)=\frac{\partial f}{\partial x_n}$.

Definiția 3.2.12. Fie funcția $f: X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^2$, derivabilă parțial de două ori în X şi cu derivatele parțiale de ordinul doi (deci, şi cele de ordinul întâi) continue. ***Diferențiala de ordinul doi*** se notează cu $\mathrm{d}^2 f(x,y)$ şi este definită prin:

$$\mathrm{d}^2 f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot \mathrm{d}x^2 + 2\cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\cdot \mathrm{d}x\cdot \mathrm{d}y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot \mathrm{d}y^2.$$

Operatorul

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\cdot \mathrm{d}x^2 + 2\cdot \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\cdot \mathrm{d}x\cdot \mathrm{d}y + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\cdot \mathrm{d}y^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot \mathrm{d}x + \frac{\partial}{\partial y}\cdot \mathrm{d}y\right)^{(2)}$$

se numeşte ***operatorul de diferențiere de ordinul doi***.

Definiția 3.2.13. Fie funcția $f: X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^2$, care are în X toate derivatele parțiale de ordinul n continue. ***Diferențiala de ordinul*** n a funcției f se notează cu $\mathrm{d}^n f(x,y)$ şi este definită prin:

$$\mathrm{d}^n f(x,y) = \frac{\partial^n f}{\partial x^n}\cdot \mathrm{d}x^n + C_n^1 \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1}\partial y}\cdot \mathrm{d}x^{n-1}\cdot \mathrm{d}y + \ldots +$$

$$+ C_n^k \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-k}\partial y^k}\cdot \mathrm{d}x^{n-k}\cdot \mathrm{d}y^k + \ldots + C_n^n \frac{\partial^n f}{\partial y^n}\cdot \mathrm{d}y^n.$$

Operatorul $\mathrm{d}^n = \left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot \mathrm{d}x + \frac{\partial}{\partial y}\cdot \mathrm{d}y\right)^{(n)}$ se numeşte ***operatorul de diferențiere de ordinul n***.

Derivatele şi diferențialele funcțiilor compuse

1) Dacă funcțiile $u, v: X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ au derivate continue pe X şi dacă funcția $f: Y \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ are derivate parțiale continue pe Y, atunci funcția $F(x) = f(u(x), v(x))$, $(\forall)\ x \in X$, are derivata continuă pe X dată de:

$$\frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}.$$

2) Dacă funcțiile $u, v: X \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ au derivate parțiale continue pe X şi dacă funcția $f: Y \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ are derivate parțiale continue pe Y, atunci funcția $F(x,y) = f[u(x,y), v(x,y)]$ are derivate parțiale continue pe X, date de:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x};$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}.$$

3) Diferențiala funcției F este dată de:

$$\mathrm{d}F=\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\mathrm{d}x+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\mathrm{d}y\,.$$

Exemplu

Fie $F(x,y)=f\left(x^2+y^2,1+xy\right)$ definită pe $\mathbb{R}^2$.

Considerând $u(x,y)=x^2+y^2,\ v(x,y)=1+xy$ avem:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot 2x+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot y;$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot 2y+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot x.$$

Diferențiala funcției F este

$$\mathrm{d}F=\left(\frac{\partial f}{\partial u}\cdot 2x+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot y\right)\cdot\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial f}{\partial u}\cdot 2y+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot x\right)\cdot\mathrm{d}y\,.$$

Observație

Derivatele parțiale şi diferențialele de ordin superior se calculează astfel:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)=$$
$$=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+$$
$$+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right),\quad \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right).$$

$$\mathrm{d}^2F=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\cdot\mathrm{d}x^2+2\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\cdot\mathrm{d}x\cdot\mathrm{d}y+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\cdot\mathrm{d}y^2.$$

Formula lui Taylor. Fie funcția $f: X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^2$, derivabilă de $n+1$ ori pe *X*, cu toate derivatele mixte egale şi fie (a,b) un punct interior lui *X*. Se consideră funcția $F(t) = f\left[a+(x-a)\cdot t, b+(y-b)\cdot t\right]$, $(x,y) \in X$, $t \in [0,1]$.

Deoarece *f* are derivate până la ordinul $n+1$ pe *X*, rezultă că şi *F* este derivabilă până la ordinul $n+1$ pe intervalul $[0,1]$, iar funcției *F* i se poate aplica formula lui Taylor stabilită pentru funcțiile de o variabilă. Rezultă că:

$$F(1) = F(0) + \frac{1}{1!}\cdot F'(0) + \frac{1}{2!}\cdot F''(0) + \ldots + \frac{1}{n!}\cdot F^{(n)}(0) + R_n,$$

unde restul $R_n = \frac{1}{(n+1)!}\cdot F^{(n+1)}(\theta)$, $\theta \in (0,1)$.

Având în vedere că $F(1) = f(x,y)$, $F(0) = f(a,b)$, $F(t) = f(x(t), y(t))$, unde $x(t) = a+(x-a)\cdot t$, $y(t) = b+(y-b)\cdot t$ şi calculând derivatele de ordin superior ale lui *F* în punctul 0, se obține formula:

$$f(x,y) = f(a,b) + \frac{1}{1!}\left((x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right)\cdot f(a,b) +$$

$$+\frac{1}{2!}\left((x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 \cdot f(a,b) + \ldots +$$

$$+\frac{1}{n!}\left((x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right)^n \cdot f(a,b) + R_n,$$

unde restul

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!}\left((x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} \cdot f\left(a+\theta(x-a), b+\theta(y-b)\right),$$

cu $\theta \in (0,1)$.

3.3 Extremele libere ale funcțiilor de mai multe variabile

Definiția 3.3.1. Fie funcția $f: X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^n$ şi punctul $x_0 \in X$. Funcția *f* are un ***minim local*** în x_0, dacă există o vecinătate *V* a lui x_0, astfel încât $f(x) \geq f(x_0)$, $(\forall)\ x \in V$.

Punctul x_0 este punct de ***maxim local*** pentru funcția *f*, dacă $f(x) \leq f(x_0)$, $(\forall)\ x \in V$.

Teorema 3.3.2. Fie funcția $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^n$ şi $(a_1, a_2, ..., a_n)$ un punct interior lui *X*. Dacă:

1) funcția f are un extremum în punctul $(a_1, a_2, ..., a_n)$,

2) funcția f are derivate parțiale în punctul $(a_1, a_2, ..., a_n)$,

atunci derivatele parțiale ale lui f se anulează în punctul $(a_1, a_2, ..., a_n)$.

Observația 3.3.3. Punctele în care funcția f poate avea extreme sunt date de soluțiile sistemului:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ ... \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \end{cases}$$

Soluțiile sistemului se numesc ***puncte critice*** sau ***puncte staționare***.

Pentru $x_0 = \left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$ punct critic pentru funcția *f*, se notează

$$a_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right).$$

Atunci:

1) dacă toți determinanții

$$\Delta_1 = a_{11},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, ...,\ \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$$

sunt pozitivi, funcția f are un minim în punctul respectiv;

2) dacă toți determinanții $\Delta_1^* = -\Delta_1,\ \Delta_2^* = \Delta_2, ...,\ \Delta_n^* = (-1)^n \cdot \Delta_n$ sunt pozitivi, funcția f are un maxim în punctul respectiv.

Se poate preciza dacă un punct critic este de extrem, folosind semnul diferențialei de ordinul doi.

Astfel:

1) dacă $\mathrm{d}^2 f\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right) > 0$, punctul $\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$ este de minim.

2) dacă $\mathrm{d}^2 f\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right) < 0$, punctul $\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$ este de maxim.

Exemple

1) Fie funcția $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=x^2+y^2-2x$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x-2;\ \frac{\partial f}{\partial y}=2y,$$

deci punctul $(1,0)$ este punct critic pentru funcția *f*.

Având în vedere că $d^2f(1,0)=2\cdot dx^2+2\cdot dy^2>0$, rezultă că punctul $(1,0)$ este punct de minim.

2) Fie funcția $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=x^2-y^2+2x$. Pentru aceasta avem:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x+2;\ \frac{\partial f}{\partial y}=-2y,$$

deci punctul $(-1,0)$ este punct critic.

Având în vedere că $d^2f(-1,0)=2\cdot dx^2-2\cdot dy^2$ nu are semn constant, punctul nu este de extrem.

Aplicații

1 Folosind criteriul Cauchy-Bolzano, să se cerceteze existența limitelor:

a) $\lim\limits_{x\to 0} x^n\cdot\sin\frac{1}{x},\ n\in\mathbb{N}$; **b)** $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{sign} x$;

c) $\lim\limits_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$; **d)** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x}{x+1}$.

Indicație de rezolvare:

a) pentru $\varepsilon>0$ arbitrar, se caută $\delta(\varepsilon)>0$, astfel încât pentru $(\forall)\ x',\ x''$, care respectă condiția $|x'|<\delta(\varepsilon), |x''|<\delta(\varepsilon)$, să se verifice $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$; $|f(x')-f(x'')|=\left|(x')^n\cdot\sin\frac{1}{x'}-(x'')^n\cdot\sin\frac{1}{x''}\right|\le|x'|^n+|x''|^n<2(\delta(\varepsilon))^n$ şi impunând ca $2(\delta(\varepsilon))^n<\varepsilon\Rightarrow 0<\delta(\varepsilon)<\sqrt[n]{\frac{\varepsilon}{2}}$ şi deci, conform teoremei Cauchy-Bolzano, limita există;

b) pentru $x'=\frac{1}{n}<\delta$ şi $x''=-\frac{1}{n},\ |x''|<\delta\Rightarrow|f(x')-f(x'')|=2$, deci limita nu există;

c) pentru $x' = \frac{1}{2n\pi}$, $x'' = \frac{2}{(2n+1)\pi} \Rightarrow \left|f(x') - f(x'')\right| = 1$, deci limita nu există;

d) limita există.

2 Să se studieze continuitatea uniformă a funcțiilor:

a) $f(x) = \frac{x+2}{x+1} \cdot \sin^2 x^2,\ x \in [0, \infty)$;

b) $f(x) = \ln x,\ x \in [\varepsilon, \mathrm{e}],\ \varepsilon > 0$; **c)** $f(x) = \ln x,\ x \in (0, \mathrm{e}]$;

d) $f(x) = \sin x^2,\ x \in \mathbb{R}$; **e)** $f(x) = \frac{x}{x+1} + x,\ x \in (0, \infty)$;

f) $f(x) = \frac{x}{x+1} + x,\ x \in (-1, \infty)$.

Indicație de rezolvare:

a) pentru $x_1 = \sqrt{2n\pi},\ x_2 = \sqrt{2n\pi + \frac{\pi}{2}} \Rightarrow |x_1 - x_2| \to 0$, dar $|f(x_1) - f(x_2)| > 1$, deci funcția nu este uniform continuă;

b) funcția este continuă pe interval compact, deci este uniform continuă;

c) pentru $x_1 = \frac{1}{n},\ x_2 = \frac{1}{2n+1} \Rightarrow |x_1 - x_2| \to 0$.

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \ln\left(2 + \frac{1}{n}\right) \geq \ln 2,$$

deci funcția nu este uniform continuă;

d) nu este uniform continuă;

e) pentru $\varepsilon > 0$ arbitrar și pentru $x_1, x_2 \in (0, \infty)$, pentru care $|x_1 - x_2| < \delta_\varepsilon \Leftrightarrow |x_1| < \delta_\varepsilon, |x_2| < \delta_\varepsilon$, se va obține:

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left|\frac{x_1}{x_1+1} + x_1 - \frac{x_2}{x_2+1} - x_2\right| \leq$$

$$\leq |x_1 - x_2| + \left|\frac{x_1 - x_2}{(x_1+1)(x_2+1)}\right| < 2 \cdot |x_1 - x_2| < 2\delta_\varepsilon$$

și impunând condiția $2\delta_\varepsilon < \varepsilon$, rezultă că funcția este uniform continuă;

f) pentru $x_1 = -1 + \frac{1}{n}$, $x_2 = -1 + \frac{2}{n}$ $\Rightarrow$ $|x_1 - x_2| = \frac{1}{n} \to 0$, dar $|f(x_1) - f(x_2)| \to \infty$, deci funcția nu este uniform continuă.

3 Să se studieze continuitatea uniformă a funcțiilor f_1, f_2, f_1+f_2, $f_1 \cdot f_2$ definite pe $\mathbb{R}$ prin

$$f_1(x)=x\cdot\sin^2 x^2;\ f_2(x)=x\cdot\cos^2 x^2.$$

Indicație de rezolvare:

Pentru $x_1=\sqrt{(2n+1)\frac{\pi}{2}},\ x_2=\sqrt{n\pi} \Rightarrow |x_1-x_2|\to 0$, dar

$$|f_1(x_1)-f_1(x_2)|\to\infty,$$

deci funcția f_1 nu este uniform continuă.

În mod asemănător se arată că nici funcția f_2 nu este uniform continuă.

Funcția $(f_1+f_2)(x)=x$ şi este uniform continuă pe $\mathbb{R}$.

Se arată că funcția $f_1 \cdot f_2$ nu este uniform continuă, considerând $x_1=\sqrt{(2n+1)\frac{\pi}{4}},\ x_2=\sqrt{\frac{n\pi}{2}}$.

4 Se consideră funcția $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$. Să se calculeze limitele iterate $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right)$ şi $\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\right)$.

Indicație de rezolvare:

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)=\lim_{x\to 0}1=1,\ \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)=\lim_{y\to 0}(-1)=-1.$$

5 Să se calculeze $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to k}}\left(1+\dfrac{y}{x}\right)^x$.

Indicație de rezolvare:

Se calculează limitele iterate şi ambele sunt egale cu e^k.

6 Fie funcția $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definită prin

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x\cdot y^2+\sin\left(x^3+y^5\right)}{x^2+y^4}, & (x,y)\neq(0,0);\\ 0, \quad (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Să se arate că deşi funcţia are limite iterate în punctul $(0,0)$, ea nu are limită în acest punct.

Indicaţie de rezolvare:

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x\cdot y^2+\sin\left(x^3+y^5\right)}{x^2+y^4}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^3}{x^2}=0$$

şi

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot y^2+\sin\left(x^3+y^5\right)}{x^2+y^4}\right)=0,$$

deci limitele iterate există.

Pentru a se arăta că f nu are limită în origine, se consideră două perechi de şiruri convergente la zero, de forma:

$$(x_n,y_n),\ x_n=y_n^2 \ \text{ şi } \ \left(x_n^1,y_n^1\right),\ x_n^1=2\cdot y_n^1.$$

Pentru acestea avem:

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n,y_n)=\frac{1}{2} \ \text{ şi } \ \lim_{n\to\infty}f\left(x_n^1,y_n^1\right)=\frac{2}{5},$$

deci cele două limite sunt diferite.

7 Să se arate că funcţia $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, definită prin:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin\left(x^3+y^3\right)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

este continuă pe $\mathbb{R}^2$.

Indicaţie de rezolvare:

Se demonstrează că pentru $(\forall)\ \varepsilon>0,\ (\exists)\ \delta(\varepsilon)>0$, astfel încât pentru $(\forall)\ (x,y)\in\mathbb{R}^2$ pentru care $\|(x,y)-(0,0)\|<\delta(\varepsilon)$, să rezulte

$$|f(x,y)-f(0,0)|<\varepsilon.$$

$$\|(x,y)-(0,0)\| = \sqrt{x^2+y^2} < \delta(\varepsilon) \Leftrightarrow |x| < \delta(\varepsilon) \text{ şi } |y| < \delta(\varepsilon).$$

Rezultă

$$|f(x,y)-f(0,0)| = \left|\frac{\sin\left(x^3+y^3\right)}{x^2+y^2}\right| = \left|\frac{\sin\left(x^3+y^3\right)}{x^3+y^3}\right| \cdot \left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right| \le \left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right| =$$

$$= \left|\frac{(x+y)\left(x^2+y^2-xy\right)}{x^2+y^2}\right| = |x+y| \cdot \left|1-\frac{xy}{x^2+y^2}\right| \le \frac{1}{2}|x+y| \le \frac{1}{2}|x| + \frac{1}{2}|y| < \delta(\varepsilon) < \varepsilon.$$

8 Fie funcția $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{y^2} \cdot e^{-\frac{|x|}{y^2}}, \ y \neq 0; \\ 0, \ y = 0. \end{cases}$$

Să se studieze continuitatea în punctul $(0,0)$.

Indicație de rezolvare:

Se consideră şirurile $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, astfel încât

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = 0,$$

de forma $x_n = y_n^2$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$. Pentru acestea $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(y_n^2, y_n\right) = \frac{1}{e} \neq 0$, deci f nu este continuă în origine.

9 Fie funcția $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definită prin:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\cdot y}{x^2+y^2}, \ (x,y) \neq (0,0); \\ 0, \ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Să se arate că f este continuă în raport cu x şi cu y în $(0,0)$, dar nu este continuă în raport cu ansamblul variabilelor în acest punct.

Indicație de rezolvare:

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = 0 = f(0,0) \text{ şi } \lim_{y\to 0} f(0,y) = 0 = f(0,0),$$

deci f este continuă în raport cu fiecare variabilă în parte.

Pentru a demonstra că f nu este continuă în raport cu ansamblul variabilelor, se consideră şirurile $x_n = \frac{1}{n} \to 0$ şi $y_n = \frac{k}{n} \to 0$, pentru k real fixat. Rezultă $\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \frac{k}{1+k^2}$, limită care depinde de k, deci f nu este continuă pe $\mathbb{R}^2$.

10 Să se calculeze derivatele parţiale de ordinul întâi pentru următoarele funcţii:

a) $z = \mathrm{e}^{x-y^2}$; **b)** $z = \ln(x^2 + y^2)$; **c)** $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$;

d) $z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$; **e)** $z = x^y$; **f)** $z = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sin\frac{x}{y}$;

g) $u = x^y + y^z - 2 \cdot z^x$; **h)** $u = \mathrm{e}^{x^2+y^2} \cdot \sin^2 z$.

Indicaţie de rezolvare:

a) $\frac{\partial z}{\partial x} = \mathrm{e}^{x-y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -2 \cdot y \cdot \mathrm{e}^{x-y^2}$;

b) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2}$;

d) $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}$;

g) $\frac{\partial u}{\partial x} = y \cdot x^{y-1} - 2 \cdot z^x \cdot \ln z$,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = z \cdot y^{z-1} + x^y \ln x, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = y^2 \ln y - 2x \cdot z^{x-1};$$

h) $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \cdot \mathrm{e}^{x^2+y^2} \cdot \sin^2 z$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 2y \cdot \mathrm{e}^{x^2+y^2} \cdot \sin^2 z$,

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \mathrm{e}^{x^2+y^2} \cdot \sin 2z.$$

11 Pornind de la definiţie, să se calculeze:

a) $\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$, $\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$, dacă $f(x, y) = \sqrt{\sin^2 x + \sin^2 y}$;

b) $\frac{\partial f}{\partial x}\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 0)$, dacă $f(x, y) = \mathrm{e}^{\sin x \cdot y}$;

c) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1)$, dacă $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$;

d) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1,1)$, dacă $f(x,y)=x\cdot y\cdot \ln x,\ x\neq 0$;

e) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(-2,2)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(-2,2)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-2,2)$, dacă $f(x,y)=\sqrt[3]{x^2\cdot y}$;

f) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(\dfrac{\pi}{4},0\right)$, dacă $f(x,y)=x\cdot\sin(x+y)$.

Indicație de rezolvare:

a)

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\pi}{4},0\right)=\lim_{x\to\pi/4}\frac{f(x,0)-f\left(\frac{\pi}{4},0\right)}{x-\frac{\pi}{4}}=\lim_{x\to\pi/4}\frac{\sin x-\sin\frac{\pi}{4}}{x-\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)=\lim_{y\to\pi/4}\frac{f\left(\frac{\pi}{4},y\right)-f\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)}{y-\frac{\pi}{4}}=\lim_{y\to\pi/4}\frac{\sqrt{\sin^2 y+\frac{1}{2}}-1}{y-\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2};$$

b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(1,\dfrac{\pi}{2}\right)=0,\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,0)=0$;

c) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1)=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)(1,1)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,1)-\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)}{x-1}$,

unde:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial y}(x,1)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}},\ \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)=\frac{1}{\sqrt{2}};$$

rezultă că $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}}{x-1}=-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$;

d) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1,1)=1$;

e) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(-2,2)=-\dfrac{2}{3},\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(-2,2)=\dfrac{1}{3},\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-2,2)=-\dfrac{1}{9}$;

f) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(\dfrac{\pi}{4},0\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(1-\dfrac{\pi}{4}\right).$

12 Să se arate că derivatele parțiale ale funcției:

$$\omega=\ln\left(x^3+y^3+z^3-3\cdot x\cdot y\cdot z\right)$$

verifică ecuația:

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}+\frac{\partial\omega}{\partial y}+\frac{\partial\omega}{\partial z}=\frac{3}{x+y+z}.$$

Indicație de rezolvare:

Avem identitatea

$$x^3+y^3+z^3-3\cdot x\cdot y\cdot z=(x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz\right),$$

de unde

$$\omega=\ln(x+y+z)+\ln\left(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz\right)$$

va avea derivatele parțiale

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}=\frac{1}{x+y+z}+\frac{2x-y-z}{x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz}$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial y}=\frac{1}{x+y+z}+\frac{2y-x-z}{x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz}$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial z}=\frac{1}{x+y+z}+\frac{2z-x-y}{x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz}$$

care, înlocuite în ecuația dată, o verifică.

13 Să se arate că funcția

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & x\neq 0,\ y\neq 0\\ 0, & x=0 \text{ sau } y=0\end{cases}$$

nu este continuă în origine, dar admite derivate parțiale în origine.

Indicație de rezolvare:

Funcția *f* nu este continuă în origine, deoarece

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=mx}} f(x,y)=1\neq f(0,0)=0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0,\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0.$$

14 Pornind de la definiție, să se arate că următoarele funcții sunt diferențiabile în punctele indicate:

a) $f(x,y)=x^3+x\cdot y+y^2$ în punctul $(1,1)$;

b) $f(x,y)=(x-2)^2+(y-1)^2$ în punctul $(2,1)$.

Indicație de rezolvare:

a) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=3\cdot x^2+y\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)=4$

şi

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x+2\cdot y\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)=3;$$

b) $\frac{\partial f}{\partial x}(2,1)=\frac{\partial f}{\partial y}(2,1)=0$ şi se caută o funcție $\omega:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ continuă şi nulă în punctul $(2,1)$, pentru care:

$$f(x,y)-f(2,1)=\omega(x,y)\cdot\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}.$$

Rezultă $\omega(x,y)=\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}$, care este continuă pe $\mathbb{R}^2$ şi $\omega(2,1)=0$, deci funcția *f* este diferențiabilă în punctul $(2,1)$.

15 Fie funcția $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, definită prin:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x\cdot|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0);\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Să se arate că *f* admite derivate parțiale în origine, dar *f* nu este diferențiabilă în acest punct.

Indicație de rezolvare:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0,\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0.$$

Dacă *f* este diferențiabilă în punctul $(0,0)$, atunci există o funcție $\omega:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ continuă şi nulă în acest punct şi care verifică:

$$f(x,y)-f(0,0)=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\cdot(x-0)+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\cdot(y-0)+\omega(x,y)\cdot\sqrt{x^2+y^2}\,.$$

De aici rezultă

$$\omega(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x\cdot|y|}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0);\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

care nu este continuă în origine. Deci, f nu este diferențiabilă în origine.

16 Să se arate că funcția $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, definită prin:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x\cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0);\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

este continuă şi admite derivate parțiale în origine, dar nu este diferențiabilă în acest punct.

17 Să se arate că derivatele parțiale de ordinul doi mixte ale funcției

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\quad f(x,y)=\begin{cases}y^2\cdot\ln\left(1+\dfrac{x^2}{y^2}\right), & y\neq 0\\ 0, & y=0\end{cases}$$

nu sunt continue în origine şi totuşi $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$.

Indicație de rezolvare:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{4\cdot x^3\cdot y}{\left(x^2+y^2\right)^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

şi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{4x^3y}{\left(x^2+y^2\right)^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

de unde rezultă că derivatele parțiale mixte sunt egale.

Pentru a demonstra că nu sunt continue, se consideră şirurile de numere reale, convergente la zero $(x_n)_n$, $(y_n)_n$, de forma $x_n = y_n$, $(\forall)\ n\in\mathbb{N}$.

Rezultă $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4\cdot x_n^4}{\left(2\cdot x_n^2\right)^2}=1\neq 0$.

18 Să se calculeze diferenţialele de ordinul întâi şi al doilea pentru funcțiile:

a) $f(x,y)=\mathrm{e}^x\cdot\cos y$;

b) $f(x,y,z)=x\cdot y\cdot z$.

Indicație de rezolvare:

a) $\mathrm{d}f=\dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot\mathrm{d}x+\dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot\mathrm{d}y=\mathrm{e}^x\cdot\cos y\cdot\mathrm{d}x-\mathrm{e}^x\cdot\sin y\cdot\mathrm{d}y$

şi

$$\mathrm{d}^2 f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\mathrm{d}x^2+2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\cdot\mathrm{d}x\cdot\mathrm{d}y+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot\mathrm{d}y^2=$$
$$=\mathrm{e}^x\cos y\cdot\mathrm{d}x^2-2\mathrm{e}^x\sin y\cdot\mathrm{d}x\cdot\mathrm{d}y-\mathrm{e}^x\cos y\cdot\mathrm{d}y^2;$$

b) $\mathrm{d}f=y\cdot z\cdot\mathrm{d}x+x\cdot z\cdot\mathrm{d}y+x\cdot y\cdot\mathrm{d}z$

şi

$$\mathrm{d}^2 f=2\cdot z\cdot\mathrm{d}x\mathrm{d}y+2\cdot x\cdot\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2\cdot y\cdot\mathrm{d}x\mathrm{d}z.$$

19 Să se calculeze derivatele parțiale şi diferențiala de ordinul n pentru funcția $f(x,y)=\mathrm{e}^{ax+by}$.

Indicație de rezolvare:

$$f(x,y)=\mathrm{e}^{ax}\cdot\mathrm{e}^{by}\Rightarrow\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,y)=a^k\cdot\mathrm{e}^{ax}\cdot\mathrm{e}^{by},$$
$$\frac{\partial^n f}{\partial x^k\partial y^{n-k}}(x,y)=a^k\cdot b^{n-k}\cdot f(x,y).$$

Rezultă diferențiala de ordinul n: $\mathrm{d}^n f=\mathrm{e}^{ax+by}\cdot\left(a\cdot\mathrm{d}x+b\cdot\mathrm{d}y\right)^n$.

20 Să se calculeze $\mathrm{d}f(1,1)$ şi $\mathrm{d}^2 f(1,1)$ pentru funcțiile:

a) $f(x,y)=x^2-x\cdot y+2\cdot y^2+3\cdot x-5\cdot y+7$;

b) $f(x,y)=\mathrm{e}^{x\cdot y}$;

c) $f(x,y)=\ln x\cdot y$.

Indicație de rezolvare:

a) $\mathrm{d}f=\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y\Rightarrow \mathrm{d}f(1,1)=4\cdot\mathrm{d}x-2\cdot\mathrm{d}y$

$$\mathrm{d}^2 f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\mathrm{d}x\cdot\mathrm{d}y+\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\mathrm{d}y\cdot\mathrm{d}x+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\mathrm{d}y^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathrm{d}^2 f(1,1)=2\mathrm{d}x^2-2\mathrm{d}x\cdot\mathrm{d}y+4\mathrm{d}y^2;$$

b) $\mathrm{d}f(1,1)=\mathrm{e}\cdot(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)$, $\mathrm{d}^2 f(1,1)=\mathrm{e}\cdot\left(\mathrm{d}x^2+4\mathrm{d}x\cdot\mathrm{d}y+\mathrm{d}y^2\right)$;

c) $\mathrm{d}f(1,1)=\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}^2 f(1,1)=-\mathrm{d}x^2-\mathrm{d}y^2$.

21 Să se calculeze $\mathrm{d}f(3,4,5)$, dacă $f(x,y,z)=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Indicație de rezolvare:

$\mathrm{d}f=\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z$, unde $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=-\frac{x\cdot z}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}$,

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=-\frac{y\cdot z}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}$ şi $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=\frac{1}{\left(x^2+y^2\right)^{1/2}}$.

Rezultă $\mathrm{d}f(3,4,5)=0,04(3\mathrm{d}x+4\mathrm{d}y-5\mathrm{d}z)$.

22 Să se calculeze $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$, ştiind că $f=f(u,v)$, $u=u(x)$, $v=v(x)$, pentru funcțiile:

a) $f(u,v)=u^v$; **b)** $f(u,v)=\sqrt{u^2+v^2}$; **c)** $f(u,v)=\mathrm{arctg}\frac{u}{v}$.

Indicație de rezolvare:

a) se foloseşte regula de derivare a funcțiilor compuse, adică:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=v\cdot u^{v-1}\cdot u'+u^v\cdot\ln u\cdot v';$$

b) $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\cdot(u\cdot u'+v\cdot v')$;

c) $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{u^2+v^2}\cdot\left(v\cdot u'-u\cdot v'\right).$

23 Să se calculeze $\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y}$ pentru funcțiile:

a) $f(u,v)=\ln\left(u^2+v\right)$, unde $u(x,y)=\mathrm{e}^{x+y^2}$, $v(x,y)=x^2+y$;

b) $f(u,v)=\operatorname{arctg}\frac{u}{v}$, unde $u(x,y)=x\cdot\sin y,\ v(x,y)=x\cdot\cos y$.

Indicație de rezolvare:

a) $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x};\ \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$, de unde rezultă:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{2u}{u^2+v}\cdot\left(u^2+x\right)\ \text{şi}\ \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{u^2+v}\cdot\left(4u^2y+1\right);$$

b) $\frac{\partial f}{\partial x}=0$ şi $\frac{\partial f}{\partial y}=1$.

24 Fie $f=f(u,v)$, unde $u=x\cdot y$ şi $v=\frac{x}{y}$. Să se calculeze derivatele parțiale de ordinul doi ale funcției f.

Indicație de rezolvare:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=y\cdot\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial f}{\partial v}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=x\cdot\frac{\partial f}{\partial u}-\frac{x}{y^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(y\cdot\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial f}{\partial v}\right)=\frac{\partial}{\partial u}\left(y\cdot\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial f}{\partial v}\right)\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+$$

$$+\frac{\partial}{\partial v}\left(y\cdot\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial f}{\partial v}\right)\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=y^2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+\frac{1}{y^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}=$$

$$=\frac{u}{v}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+\frac{v}{u}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}.$$

Similar, se obțin rezultatele:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = u \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - \frac{v^2}{u} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{v}{u} \cdot \frac{\partial f}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = uv \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - 2v^2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{v^3}{u} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + \frac{2v^2}{u} \cdot \frac{\partial f}{\partial v}.$$

25 Să se calculeze $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$, dacă $f(x) = \varphi(u(x), v(x))$, pentru:

a) $\varphi(u,v) = u + uv,\ u(x) = \cos x,\ v(x) = \sin x$;

b) $\varphi(u,v) = \mathrm{e}^{u-2v},\ u(x) = x^2,\ v(x) = x^2 - 2$;

c) $\varphi(u,v) = u^v,\ u(x) = \sin x,\ v(x) = \cos x$.

Indicație de rezolvare:

a) $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = (1+v) \cdot (-\sin x) + u \cdot \cos x = \cos 2x - \sin x$;

b) $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = (-2x) \cdot \mathrm{e}^{-x^2+4}$;

c) $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = (\sin x)^{\cos x - 1} \cdot \left(\cos^2 x - \sin^2 x \cdot \ln(\sin x)\right)$.

26 Să se calculeze $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$, dacă $f(x) = \varphi(u(x), v(x), w(x))$, pentru:

a) $\varphi(u,v,w) = uvw,\ u(x) = x^2 + 1,\ v(x) = \ln x,\ w(x) = \mathrm{tg}\, x$;

b) $\varphi(u,v,w) = \frac{w}{\sqrt{u^2 + v^2}},\ u(x) = R\cos x,\ v(x) = R\sin x,\ w(x) = h$.

Indicație de rezolvare:

a) $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + \frac{\partial \varphi}{\partial w} \cdot \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} =$

$$= 2x \cdot \ln x \cdot \mathrm{tg}\, x + \left(x + \frac{1}{x}\right) \cdot \mathrm{tg}\, x + \frac{\ln x}{\cos^2 x} \cdot \left(x^2 + 1\right);$$

b) $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = 0$.

27 Să se calculeze $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ pentru $f(x,y) = \varphi(u(x,y), v(x,y))$, unde:

a) $f=\varphi(u,v),\ u(x,y)=x+y,\ v(x,y)=x^2+y^2$;

b) $f=\varphi(u,v),\ u(x,y)=x^2-y^2,\ v(x,y)=\mathrm{e}^{x\cdot y}$.

Indicație de rezolvare:

a)
$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial \varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial \varphi}{\partial u}+2x\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial v}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial \varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial \varphi}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial \varphi}{\partial u}+2y\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial v}.$$

b)
$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial u}+yv\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial v},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=-2y\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial u}+xv\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial v}.$$

28 Să se arate că:

a) $f(x,y)=y\cdot\varphi(x^2-y^2)$, unde φ este o funcție derivabilă, verifică ecuația $\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{y^2}\cdot f$;

b) $f(x,y)=x\cdot y+x\cdot\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, unde φ este o funcție derivabilă, verifică ecuația $x\cdot\frac{\partial f}{\partial x}+y\cdot\frac{\partial f}{\partial y}=x\cdot y+f$.

Indicație de rezolvare:

a) se consideră $u(x,y)=x^2-y^2$, de unde rezultă că derivatele parțiale ale funcției f sunt:
$$\frac{\partial f}{\partial x}=y\cdot\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=y\cdot\varphi'\cdot(2x),\ \frac{\partial f}{\partial y}=\varphi+y\cdot\varphi'\cdot(-2y).$$

Înlocuite în ecuația dată conduc la $2y\cdot\varphi'-2y\cdot\varphi'+\frac{\varphi}{y}=\frac{1}{y}\cdot\varphi$, deci ecuația este verificată.

29 Ce devine ecuația
$$x^2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-y^2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0,$$
dacă $f(x,y)=\varphi\left(xy,\frac{y}{x}\right)$?

Indicație de rezolvare:

Se consideră

$$u(x,y)=xy,\ v(x,y)=\frac{y}{x},$$

de unde rezultă că:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=y^2\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}-2\cdot\frac{y^2}{x^2}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}+\frac{y^2}{x^4}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}+2\cdot\frac{y}{x^3}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=x^2\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}+2\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}+\frac{1}{x^2}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}$$

şi ecuația devine $-2u\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}+\frac{\partial\varphi}{\partial v}=0$.

30 Folosind formula lui Taylor de ordinul doi, să se calculeze valoarea aproximativă pentru:

a) $\sqrt{1{,}03}\cdot\sqrt[3]{0{,}98}$; **b)** $(0{,}95)^{2{,}01}$; **c)** $1{,}02\cdot 2{,}01^2\cdot 3{,}03^3$.

Indicație de rezolvare:

a) se consideră funcția $f(x,y)=x^{1/2}\cdot y^{1/3}$, care se dezvoltă după formula lui Taylor în punctul $(1,1)$ pentru $h=0{,}03$ şi $k=-0{,}02$; rezultă

$$\sqrt{1{,}03}\cdot\sqrt[3]{0{,}98}=f(1+h,1+k)=f(1,1)+\frac{1}{1!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)\cdot h+\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)\cdot k\right)+$$

$$+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1)\cdot h^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,1)\cdot hk+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1)\cdot k^2\right)+R_2\approx 1{,}0081;$$

b) se consideră funcția $f(x,y)=x^y$, care se dezvoltă după formula lui Taylor în punctul $(1,2)$; rezultă $h=-0{,}05,\ k=0{,}01$ şi $f(0{,}95;2{,}01)\approx 0{,}902$;

c) se consideră funcția $f(x,y,z)=x\cdot y^2\cdot z^3$, care se dezvoltă după formula lui Taylor în punctul $(1,2,3)\Rightarrow h=0{,}02,\ k=0{,}01,\ \ell=0{,}03$ şi $f(1{,}02;\,2{,}01;\,3{,}03)\approx 114{,}6159$.

31 Considerând $|x|,\ |y|,\ |z|$ suficient de mici, să se aproximeze funcția $f(x,y,z)=(1+x)^{1/2}\cdot(1+y)^{-1/2}\cdot(1+z)^{-1/2}$.

32 Să se găsească punctele de extrem local pentru funcțiile:

a) $f(x,y)=x^3+y^3-3\cdot x\cdot y,\ (x,y)\in\mathbb{R}^2$;

b) $f(x,y)=3\cdot x\cdot y^2-x^3-15\cdot x-36\cdot y+9,\ (x,y)\in \mathbb{R}^2$;

c) $f(x,y)=y^4-8\cdot y^3+18\cdot y^2-8\cdot y+x^3-3\cdot x^2-3\cdot x,\ (x,y)\in \mathbb{R}^2$;

d) $f(x,y)=\sin x\cdot \sin y\cdot \sin(x+y),\ 0<x<2\pi,\ 0<y<2\pi$;

e) $f(x,y)=(x+1)(y+1)(x+y),\ (x,y)\in \mathbb{R}^2$;

f) $f(x,y)=a\cdot x^2+2b\cdot x\cdot y+c\cdot y^2-e\cdot x-f\cdot y,\ (x,y)\in \mathbb{R}^2$;

g) $f(x,y)=x\cdot y\cdot \ln\left(x^2+y^2\right),\ (x,y)\in \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$;

h) $f(x,y)=\sin x+\sin y+\sin(x+y),\ x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\ y\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Indicație de rezolvare:

a) se determină punctele critice, care sunt soluțiile sistemului:

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3\cdot x^2-3\cdot y=0\\ 3\cdot y^2-3\cdot x=0\end{cases} \Rightarrow \mathrm{A}(0,0),\ \mathrm{B}(1,1) \text{ sunt punctele critice;}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=6y,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=-3,$$

de unde rezultă, pentru punctul critic

$$\mathrm{A}(0,0):\ \mathrm{d}^2 f(0,0)=-6\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

deci punctul nu este de extrem; pentru punctul critic

$$\mathrm{B}(1,1):\ \mathrm{d}^2 f(1,1)=6\mathrm{d}x^2+6\mathrm{d}y^2-6\mathrm{d}x\mathrm{d}y>0,$$

deci punctul este de minim;

b) punctele critice sunt A(2,3) şi $\mathrm{B}(-2,-3)$ şi nici unul dintre acestea nu este de extrem, deoarece $\Delta_1=-6x,\ \Delta_2=\begin{vmatrix}-6x & 6y\\ 6y & 6x\end{vmatrix}$; rezultă $\Delta_2<0$, pentru ambele puncte critice, deci ele nu sunt de extrem;

c) punctele critice sunt:

$$\mathrm{M}_1\left(1+\sqrt{2},2\right),\ \mathrm{M}_2\left(1+\sqrt{2},2+\sqrt{3}\right),\ \mathrm{M}_3\left(1+\sqrt{2},2-\sqrt{3}\right),$$

$$\mathrm{M}_4\left(1-\sqrt{2},2\right),\ \mathrm{M}_5\left(1-\sqrt{2},2+\sqrt{3}\right),\ \mathrm{M}_6\left(1-\sqrt{2},2-\sqrt{3}\right);$$

dintre acestea, M_2 şi M_3 sunt puncte de minim, M_4 este punct de maxim, iar celelalte nu sunt puncte de extrem;

d) $\dfrac{\partial f}{\partial x}=0 \Leftrightarrow \sin y\cdot\sin(2x+y)=0$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}=0 \Leftrightarrow \sin x\cdot\sin(x+2y)=0$;

rezolvând sistemul, se obțin punctele critice $\mathrm{A}(\pi,\pi)$, $\mathrm{B}\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{3}\right)$;

pentru punctul B: $\Delta_1<0,\ \Delta_2>0$, deci este punct de maxim; pentru punctul A: $\Delta_1=0,\ \Delta_2=0$ şi, de asemenea, diferențialele de ordinul întâi şi al doilea sunt zero, deci nu putem şti, utilizând aceste metode, dacă punctul este sau nu de extrem, astfel se calculează diferențiala de ordinul trei, care ia atât valori pozitive, cât şi negative, deci punctul nu este de extrem;

e) $\mathrm{A}\left(-\dfrac{1}{3},-\dfrac{1}{3}\right)$ este punct de minim;

f) dacă $a\cdot c-b^2>0$, *f* are un punct de extrem; dacă $a>0$, punctul este de minim, iar dacă $a<0$ punctul este de maxim; dacă $a\cdot c-b^2=0$ şi $\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}=\dfrac{e}{f}$, *f* are un punct de extrem; pentru $a>0$ punctul este de minim, iar pentru $a<0$ este de maxim, în celelalte cazuri funcția nu are extreme;

g) $\mathrm{M}_1\left((2\mathrm{e})^{-1/2},(2\mathrm{e})^{-1/2}\right)$, $\mathrm{M}_2\left(-(2\mathrm{e})^{-1/2},-(2\mathrm{e})^{-1/2}\right)$ sunt puncte de minim, iar $\mathrm{M}_3\left((2\mathrm{e})^{-1/2},-(2\mathrm{e})^{-1/2}\right)$, $\mathrm{M}_4\left(-(2\mathrm{e})^{-1/2},(2\mathrm{e})^{-1/2}\right)$ sunt puncte de maxim;

h) $\mathrm{A}\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{3}\right)$ este punct de maxim.

33 Fiind dată capacitatea $V=\dfrac{a^3}{2}$ pentru un bazin paralelipipedic, să se determine dimensiunile sale, astfel încât să se întrebuințeze minim de material (suprafață minimă) pentru construcția sa.

Indicație de rezolvare:

Fie *x*, *y* şi *z* dimensiunile bazinului, *z* fiind înălțimea acestuia.

Rezultă că $x\cdot y\cdot z=\dfrac{a^3}{2}$, iar suprafața

$$S=2\cdot x\cdot z+2\cdot y\cdot z+x\cdot y=\frac{a^3}{y}+\frac{a^3}{x}+x\cdot y.$$

Se consideră, astfel, funcția $f(x,y)=\frac{a^3}{x}+\frac{a^3}{y}+x\cdot y$, care are un minim pentru $x=y=a$, de unde rezultă dimensiunile bazinului $x=a,\ y=a,\ z=\frac{a}{2}$.

34 Să se înscrie într-un con circular drept un paralelipiped dreptunghic de volum maxim.

Indicație de rezolvare:

Fie r raza bazei conului şi h înălțimea acestuia. Dreptunghiurile care constituie bazele paralelipipedului sunt înscrise în cercurile de bază ale unui cilindru circular drept înscris în conul dat.

Se consideră x şi y dimensiunile bazei paralelipipedului.

Atunci, volumul său va fi dat de

$$V=\frac{h}{2\cdot r}\cdot x\cdot y\left(2\cdot r-\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

şi este maxim pentru $x=y=\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot r$ şi înălțimea $\frac{h}{3}$.

Test de autoevaluare

1 Să se arate că funcțiile următoare verifică ecuațiile indicate:

a) $f(x,y)=\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$, unde φ este o funcție derivabilă, verifică ecuația

$$x\cdot\frac{\partial f}{\partial x}+y\cdot\frac{\partial f}{\partial y}=0;$$

b) $f(x,y,z)=\varphi\left(x\cdot y,x^2+y^2-z^2\right)$, unde φ este o funcție derivabilă, verifică ecuația

$$xz\frac{\partial f}{\partial x}-yz\frac{\partial f}{\partial y}+\left(x^2-y^2\right)\frac{\partial f}{\partial z}=0.$$

2 Să se calculeze $\mathrm{d}f$ şi $\mathrm{d}^2 f$, dacă:

a) $f(x,y)=\varphi\left(\dfrac{x}{y}\right)$**,** unde φ este de clasă C^2;

b) $f(x,y)=\varphi(x+y,x-y)$**,** unde φ este de clasă C^2;

c) $f(x,y,z)=\varphi\left(x+y+z,x^2+y^2+z^2\right)$**,** unde φ este de clasă C^2.

3 Să se scrie formula lui Taylor pentru funcția $f(x,y)=\mathrm{e}^{x+y}$ în punctul $(1,-1)$.

4 Să se determine punctele de extrem pentru funcțiile:

a) $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+2\cdot x+4\cdot y-6\cdot z,\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$;

b) $f(x,y,z)=\sin x+\sin y+\sin z-\sin(x+y+z)$,
$(x,y,z)\in(0,\pi)\times(0,\pi)\times(0,\pi)$;

c) $f(x,y,z)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{16},\ x>0,\ y>0,\ z>0$;

d) $f(x,y,z)=a\cdot x^2-b\cdot x\cdot y+x\cdot z+y\cdot z,\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

LECȚIA 2

3.4 Funcții implicite

Definiția 3.4.1. Fie ecuația $F(x,y)=0$, unde $F: X \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. O funcție $y=f(x)$ definită pe mulțimea $A \subset \mathbb{R}$, astfel încât pentru orice $x \in A$, $(x, f(x)) \in X$ se numeşte ***soluție în raport cu y a ecuației*** $F(x,y)=0$ pe mulțimea *A*, dacă $F(x, f(x)) \equiv 0$ pentru $x \in A$.

Definiția 3.4.2. Funcțiile $y=f(x)$ definite cu ajutorul ecuațiilor $F(x,y)=0$ se numesc ***funcții implicite*** sau ***funcții definite implicit***.

Observație. O ecuație $F(x,y)=0$ poate să aibă pe *A* mai multe soluții sau nici una.

Exemple

1) Ecuația $x^2+y^2-1=0$ are în raport cu *y* o infinitate de soluții definite pe $[-1,+1]$ de

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2},\ \alpha \le x \le \beta,\ \alpha \ge -1,\ \beta \le 1\\ -\sqrt{1-x^2},\ x \in [-1,+1] \setminus [\alpha,\beta]\end{cases}$$

deoarece fiecare verifică ecuația $x^2+y^2-1=0$.

Se observă că soluțiile nu sunt continue în punctul $x=\alpha$ sau $x=\beta$.

2) Ecuația $x^4+y^4+1=0,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$ nu are nici o soluție reală.

3) Ecuația $2x-3y+5=0,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$ are o singură soluție:

$$f(x)=\frac{5}{3}+\frac{2}{3}\cdot x,\ x \in \mathbb{R}.$$

Teorema 3.4.3. Fie funcția $F: X \times Y \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$, $Y \subset \mathbb{R}$ şi (x_0, y_0) un punct interior lui $X \times Y$. Dacă:

1) $F(x_0, y_0)=0$,

2) $F(x,y)$, $F'_x(x,y)$, $F'_y(x,y)$ sunt continue pe o vecinătate $U \times V \subset X \times Y$ a lui (x_0, y_0),

3) $F'_y(x_0, y_0) \ne 0$,

atunci:

i) există o vecinătate $U_0 \subset U$ a lui x_0 şi o vecinătate $V_0 \subset V$ a lui y_0 şi există o unică funcţie $y = f(x): U_0 \to V_0$, astfel încât $f(x_0) = y_0$ şi $F(x, f(x)) \equiv 0$ pentru $x \in U_0$;

ii) funcţia $f(x)$ are derivata continuă pe U_0 dată de:

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)};$$

iii) dacă $F(x, y)$ are derivatele parţiale de ordinul *k* continue pe $U \times V$, atunci $f(x)$ are derivata de ordinul *k* continuă pe U_0.

Definiţia 3.4.4. Fie ecuaţia $F(x_1, x_2, ..., x_n, y) = 0$, unde $F(x_1, x_2, ..., x_n, y)$ este o funcţie reală de $n+1$ variabile definită pe o mulţime $X \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

O funcţie $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ definită pe mulţimea $A \subset \mathbb{R}^n$ este ***soluţie în raport cu** y* a acestei ecuaţii, dacă pentru $(x_1, x_2, ..., x_n) \in A$ avem:

$$F(x_1, x_2, ..., x_n, f(x_1, x_2, ..., x_n)) \equiv 0.$$

Teorema 3.4.5. Fie $F(x_1, x_2, ..., x_n, y)$ o funcţie reală definită pe $X \times Y$, $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}$, $x_0 = (x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0})$ un punct interior lui *X* şi y_0 un punct interior lui *Y*. Dacă:

1) $F(x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0}, y_0) = 0$,

2) funcţia $F(x_1, x_2, ..., x_n, y)$ este continuă împreună cu derivatele parţiale F'_{x_1}, F'_{x_2},..., F'_{x_n}, F'_y pe o vecinătate $U \times V$ a punctului $(x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0}, y_0)$,

3) $F'_y(x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0}, y_0) \neq 0$,

atunci:

i) există o vecinătate $U_0 \subset U$ a lui $x_0 = (x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0})$, o vecinătate $V_0 \subset V$ a lui y_0 şi o unică funcţie $y = f(x_1, x_2, ..., x_n): U_0 \to V_0$, astfel încât $f(x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0}) = y_0$ şi $F(x_1, x_2, ..., x_n, f(x_1, x_2, ..., x_n)) \equiv 0$ pentru $x \in U_0$;

ii) funcţia $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ are derivate parţiale continue în raport cu x_i, $i = 1, 2, ..., n$ pe U_0 date de $f'_{x_i} = -\dfrac{F'_{x_i}(x_1, x_2, ..., x_n)}{F'_y(x_1, x_2, ..., x_n)}$, $i = 1, 2, ..., n$;

iii) dacă $F(x_1, x_2, ..., x_n, y)$ are derivate parţiale de ordinul *k* continue pe $U \times V$, atunci funcţia implicită $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ are derivate parţiale de ordinul *k* continue pe U_0.

3.5 Dependenţă funcţională

Definiția 3.5.1. Fie $y_k = f_k(x_1, x_2, ..., x_n)$, $k = 1,2,...,m$, m funcții reale definite pe o mulțime $X \subset \mathbb{R}^n$. O funcție reală $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ definită pe X ***depinde de funcțiile*** $f_1, f_2, ..., f_m$ pe mulțimea X, dacă există o funcție reală de m variabile $\Phi(y_1, y_2, ..., y_m)$ definită pe o mulțime $Y \subset \mathbb{R}^m$, astfel încât pentru $x \in X$ să avem $F(x_1, x_2, ..., x_n) \equiv \Phi(f_1(x_1, x_2, ..., x_n), ..., f_m(x_1, x_2, ..., x_n))$.

Exemplu

Fie funcțiile f, g, $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definite prin:

$$f(x, y, z) = x + y + z;$$
$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2;$$
$$h(x, y, z) = xy + yz + zx.$$

Avem $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) \Rightarrow g \equiv f^2 + 2h$, deci g depinde de funcțiile f și h.

Definiția 3.5.2. Funcțiile $y_k = f_k(x_1, x_2, ..., x_n)$, $k = 1,2,...,m$, definite pe o mulțime $X \subset \mathbb{R}^n$ sunt ***în dependență funcțională pe o mulțime*** $A \subset X$, dacă cel puțin una dintre ele depinde de celelalte pe mulțimea A.

Teorema 3.5.3. Condiția necesară și suficientă pentru ca n funcții de n variabile independente $y_k = f_k(x_1, x_2, ..., x_n)$, $k = 1,2,...,n$, definite pe o mulțime $X \subset \mathbb{R}^n$, cu derivate parțiale continue pe X, să fie independente funcțional pe $A \subset X$ este ca determinantul funcțional:

$$\frac{D(y_1, y_2, ..., y_n)}{D(x_1, x_2, ..., x_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

să fie identic nul pe A.

Definiția 3.5.4. Funcțiile $f_1(x_1, ..., x_n), f_2(x_1, ..., x_n), ..., f_n(x_1, ..., x_n)$ definite pe o mulțime $X \subset \mathbb{R}^n$ se spune că sunt ***independente*** într-un punct $(x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0}) \in X$ dacă nici una din funcții nu depinde de celelalte într-o vecinătate a lui $(x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0}) \in X$.

Funcțiile $f_1(x_1,...,x_n), f_2(x_1,...,x_n),..., f_n(x_1,...,x_n)$ sunt ***independente*** pe X dacă sunt independente în orice punct interior al mulțimii X.

3.6 Extreme condiționate

Fie $y = f(x_1, x_2,..., x_n)$ o funcție reală definită pe o mulțime $X \subset \mathbb{R}^n$ şi un sistem de $p < n$ ecuații de forma:

$$\begin{cases} F_1(x_1,x_2,...,x_n)=0 \\ F_2(x_1,x_2,...,x_n)=0 \\ .... \\ F_p(x_1,x_2,...,x_n)=0 \end{cases}$$

funcțiile reale $F_1, F_2,..., F_p$ fiind definite pe aceeaşi mulțime $X \subset R^n$.

Definiția 3.6.1. Extremele funcției $y = f(x_1, x_2,..., x_n)$ când punctul $(x_1, x_2,..., x_n)$ parcurge numai mulțimea A a soluțiilor sistemului (5.6.1) se numesc ***extremele funcției f condiționate*** de sistem.

Teorema 3.6.2. Fie funcția $\Phi(x_1, x_2,..., x_n; \lambda_1, \lambda_2,..., \lambda_p)$ de $n+p$ variabile definită de:

$$\Phi = f(x_1,...,x_n) + \lambda_1 \cdot F_1(x_1,...,x_n) + ... + \lambda_p \cdot F_p(x_1,...,x_n)$$

şi $(a_1, a_2,..., a_n; \mu_1, \mu_2,..., \mu_p)$ un punct staționar liber al funcției Φ. Punctul $(a_1, a_2,..., a_n)$ este punct staționar al funcției $y = f(x_1, x_2,..., x_n)$ cu legăturile $F_1 = 0, F_2 = 0,..., F_p = 0$.

Observație. Numerele $\lambda_1, \lambda_2,..., \lambda_p$ se numesc ***multiplicatorii lui Lagrange***.

Pentru a determina punctele de extrem ale unei funcții $y = f(x_1, x_2,..., x_n)$ cu legăturile $F_1 = 0,\ F_2 = 0,...,\ F_p = 0$ se procedează astfel:

1) se formează funcția ajutătoare:

$$\Phi = f(x_1,...,x_n) + \lambda_1 \cdot F_1(x_1,...,x_n) + ... + \lambda_p \cdot F_p(x_1,...,x_n);$$

2) cu $\lambda_1,\ \lambda_2,...,\ \lambda_p$ parametri;

3) se rezolvă sistemul:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_1} = 0,\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_2} = 0, ...,\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_n} = 0 \\ F_1 = 0,\ F_2 = 0,\ F_p = 0 \end{cases}$$

cu $n + p$ ecuații şi $n + p$ necunoscute;

4) dacă $(a_1, a_2, ..., a_n; \mu_1, \mu_2, ..., \mu_p)$ este o soluție a acestui sistem, punctul $(a_1, a_2, ..., a_n)$ este punct staționar condiționat al funcției $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Punctele de extrem condiționat ale funcției *f* se găsesc printre punctele staționare condiționate.

Pentru a stabili dacă punctele staționare condiționate sunt de extrem, se studiază diferența $f(x_1, x_2, ..., x_n) - f(a_1, a_2, ..., a_n)$ pentru punctele care verifică sistemul $F_1 = 0,\ F_2 = 0, ...,\ F_p = 0$, de unde rezultă că avem:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) - f(a_1, a_2, ..., a_n) = \Phi(x_1, x_2, ..., x_n) - \Phi(a_1, a_2, ..., a_n),$$

adică se studiază diferența:

$$E = \Phi(x_1, x_2, ..., x_n) - \Phi(a_1, a_2, ..., a_n).$$

Aplicând formula lui Taylor funcției $\Phi(x_1, ..., x_n)$ în punctul $(a_1, a_2, ..., a_n)$, avem $E = \dfrac{1}{2} \sum \dfrac{\partial^2 \Phi(a_1, ..., a_n)}{\partial x_i \partial x_j} \mathrm{d}x_i \mathrm{d}x_j + R$, unde $x_i - a_i = \mathrm{d}x_i,\ i = 1, 2, ..., n$.

Semnul diferenței *E* este dat de semnul formei pătratice:

$$\mathrm{d}^2 \Phi(a_1, ..., a_n) = \sum \frac{\partial^2 \Phi(a_1, ..., a_n)}{\partial x_i \partial x_j} \mathrm{d}x_i \mathrm{d}x_j .$$

3.7 Aplicații

3.7.1 Să se calculeze $f'(1)$, $f''(1)$ pentru funcția implicită $y = f(x)$, definită prin ecuația $\left(x^2+y^2\right)^3 - 3\cdot\left(x^2+y^2\right) - 2 = 0$, satisfăcând condiția $f(1)=1$.

Indicație de rezolvare:

Se consideră funcția $F(x,y)=\left(x^2+y^2\right)^3-3\cdot\left(x^2+y^2\right)$ definită pe $\mathbb{R}^2$. Pentru ea există derivatele parțiale de ordinul întâi de forma:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)=6x\cdot\left(x^2+y^2\right)^2-6x,\ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)=6y\cdot\left(x^2+y^2\right)^2-6y.$$

Pentru un punct $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$, pentru care $F(x_0,y_0)=0$ şi $y_0\neq 0$, $x_0^2+y_0^2\neq 1$, se verifică ipotezele din teorema funcțiilor implicite şi putem scrie:

$$f'(x)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}=-\frac{x}{y}\Rightarrow f'(1)=-1$$

$$f''(x)=\frac{\partial f'(x)}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{y}\right)=-\frac{y-x\cdot y'}{y^2}=-\frac{1}{y^2}\left(y+\frac{x^2}{y}\right)\Rightarrow f''(1)=-2.$$

3.7.2 Se consideră funcția $y = f(x)$ definită implicit prin relația $x^2+y^2+2\cdot a\cdot x\cdot y=0,\ a>1$. Să se arate că $f''(x)=0$.

Indicație de rezolvare:

Fie $F(x,y)=x^2+y^2+2\cdot a\cdot x\cdot y,\ a>1$, definită pe $\mathbb{R}^2$.

Există $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)=2x+2ay,\ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)=2y+2ax$.

Fie un punct $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$, astfel încât $F(x_0,y_0)=0$ şi pentru care $y_0+ax_0\neq 0$. Derivatele parțiale de ordinul I ale lui F sunt continue pe $\mathbb{R}^2$, deci şi pe o vecinătate $U\times V$ a punctului $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ şi $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$. Astfel sunt îndeplinite condițiile din teorema funcțiilor implicite şi este asigurată existența funcției $f:U_0\to V_0,\ U_0\subset U,\ V_0\subset V$ şi a derivatei sale.

Deoarece $y = f(x)$ trebuie să verifice $x^2 + y^2 + 2 \cdot a \cdot x \cdot y = 0,\ a > 1$, rezultă că $x^2 + f^2(x) + 2a \cdot x \cdot f(x) = 0$. Derivând aceasta, vom obține:

$$2 \cdot x + 2f(x) \cdot f'(x) + 2a \cdot f(x) + 2a \cdot x \cdot f'(x) = 0 \Rightarrow f'(x) = -\frac{x + a \cdot f(x)}{a \cdot x + f(x)}.$$

Derivând ultima relație obținută, rezultă:

$$f''(x) = \frac{a^2 - 1}{[a + f(x)]^3} \cdot \left[x^2 + f^2(x) + 2a \cdot x \cdot f(x)\right] = 0 \Rightarrow f''(x) = 0.$$

3.7.3 Să se determine punctele de extrem pentru funcțiile implicite $y = f(x)$ definite prin:

a) $x^2 - 2 \cdot x \cdot y + 5 \cdot y^2 - 2 \cdot x + 4 \cdot y + 1 = 0$;

b) $x^3 + y^3 - 3 \cdot x^2 \cdot y - 3 = 0$;

c) $y^2 + 2 \cdot y \cdot x^2 - 4 \cdot x - 3 = 0$;

d) $y^3 + x^2 - x \cdot y - 3 \cdot x - y + 4 = 0$;

e) $\left(x^2 + y^2\right)^2 = a^2 \cdot \left(x^2 - y^2\right)$.

Indicație de rezolvare:

a) $f'(x) = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\dfrac{2x - 2y - 2}{-2x + 10y + 4}$, unde s-a considerat

$$F(x, y) = x^2 - 2 \cdot x \cdot y + 5 \cdot y^2 - 2 \cdot x + 4 \cdot y + 1 .$$

Se obține sistemul:

$$\begin{cases} 2x - 2y - 2 = 0; \\ x^2 - 2xy + 5y^2 - 2x + 4y + 1 = 0, \end{cases}$$

care are soluțiile $\mathrm{A}(1,0)$, $\mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

În același timp,

$$f''(x) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2x - 2y - 2}{2x - 10y - 4}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x - y - 1}{x - 5y - 2}\right) =$$

$$= \frac{(1 - f'(x))(x - 5f(x) - 2) - (x - f(x) - 1)(1 - 5f'(x))}{(x - 5f(x) - 2)^2} \Rightarrow f''(1) = -1 < 0,$$

deci punctul 1 este de maxim, iar $f''\left(\frac{1}{2}\right)=1>0$, deci punctul $\frac{1}{2}$ este de minim.

b) $f'(x)=-\frac{3x^2-6xy}{3y^2-3x^2} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2-6xy=0 \\ x^3+y^3-3x^2y-3=0 \end{cases} \Rightarrow \mathrm{A}\left(0,\sqrt[3]{3}\right),\ \mathrm{B}(-2,-1)$

sunt soluțiile sistemului;

$$f''(x)=\frac{2y^3+2x^2y-2xy^2+2x\left(x\cdot y-x^2-y^2\right)\cdot y'}{\left(x^2-y^2\right)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(0)=\frac{2}{\sqrt[3]{3}},\ f''(-2)=-\frac{2}{3},$$

deci 0 este punct de minim, iar -2 este punct de maxim;

c) fie

$$F(x,y)=y^2+2yx^2-4x-3 \Rightarrow f'(x)=-\frac{2xy-2}{y+x^2},$$

de unde se obține sistemul:

$$\begin{cases} xy=1 \\ y^2+2yx^2-4x-3=0 \end{cases}$$

cu soluțiile $\mathrm{A}(-1,-1)$, $\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},2\right)$;

$$f''(x)=-2\cdot\frac{\left(f(x)+xf'(x)\right)\left(f(x)+x^2\right)-\left(xf(x)-1\right)\left(f'(x)+2x\right)}{\left(f(x)+x^2\right)^2}$$

şi deoarece $f''\left(\frac{1}{2}\right)<0$, rezultă că punctul $x=\frac{1}{2}$ este de maxim. Punctul $x=-1$ nu este de extrem, deoarece diferențiala de ordinul doi a lui F este $\mathrm{d}^2F(-1,-1)=-4\mathrm{d}x^2-2\mathrm{d}y^2-8x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ nu păstrează semn constant;

d) $x=\frac{5}{8}$ este de maxim.

3.7.4 Să se calculeze $\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1,0)$ pentru funcția $z=f(x,y)$ definită implicit prin $x\cos y+y\cos z+z\cos x-1=0$, satisfăcând condiția $f(1,0)=0$.

Indicație de rezolvare:

Fie funcția $F(x,y,z)=x\cos y+y\cos z+z\cos x-1$ definită pe $\mathbb{R}^3$.

Rezultă

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)=\cos y-z\cdot\sin x,\ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z)=\cos z-x\cdot\sin y$$

şi

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)=\cos x-y\cdot\sin z$$

continue pe $\mathbb{R}^3$.

Se consideră punctul $(x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{R}^3$, pentru care $F(x_0,y_0,z_0)=0$ şi $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\neq 0$. Astfel, funcția F şi derivatele sale parțiale de ordinul I sunt continue într-o vecinătate a lui $(x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{R}^3$, fiind îndeplinite condițiile din teorema funcțiilor implicite şi putem scrie:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)},\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)},$$

de unde rezultă

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=-\frac{\cos y-z\sin x}{-y\sin z+\cos x},\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-\frac{-x\sin y+\cos z}{-y\sin z+\cos x},$$

deci

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)=-\frac{1}{\cos 1},\ \frac{\partial f}{\partial y}(1,0)=-\frac{1}{\cos 1}.$$

3.7.5 Să se calculeze derivatele parțiale de ordinul întâi şi doi ale funcției implicite $z=f(x,y)$, definite prin:

a) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$;

b) $x^2+y^2+z^2-1=0$.

Indicație de rezolvare:

a) fie $F(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1$, se scriu derivatele parțiale de ordinul I ale lui F, care sunt continue pe $\mathbb{R}^3$ şi se consideră un punct

$(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$, pentru care $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ şi $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$; astfel, funcția *F* şi derivatele sale parțiale de ordinul I sunt continue şi pe o vecinătate a lui $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ şi sunt verificate condițiile din teorema funcțiilor implicite, rezultă:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{c^2}{a^2} \cdot \frac{x}{z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{c^2}{b^2} \cdot \frac{y}{z};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{c^2}{a^2} \cdot \frac{x}{z}\right) = \frac{c^4}{a^2 \cdot b^2} \frac{\left(y^2 - b^2\right)}{z^3};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{c^2}{b^2} \cdot \frac{y}{z}\right) = \frac{c^4}{a^2 \cdot b^2} \cdot \frac{\left(x^2 - a^2\right)}{z^3};$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{c^2}{b^2} \cdot \frac{y}{z}\right) = -\frac{c^4}{a^2 \cdot b^2} \cdot \frac{x \cdot y}{z^3};$$

b)

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{z}{x}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{y^2 - 1}{z^3}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{x^2 - 1}{z^3}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{x \cdot y}{z^3}.$$

3.7.6 Să se calculeze $\mathrm{d}z$, $\mathrm{d}^2 z$ pentru funcția implicită $z = f(x, y)$ definită prin:

a) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$;

b) $\frac{x}{z} - \ln\frac{z}{y} = 0$;

c) $\ln z = x + y + z - 1$.

Indicație de rezolvare:

a) fie $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2$, derivatele sale parțiale de ordinul I sunt $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) = 2x$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) = 2y$ şi $\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = 2z$, care sunt continue pe $\mathbb{R}^3$; se consideră un punct $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$, pentru care $F(x_0, y_0, z_0) = 0$, $z \neq 0$; funcția *F* şi derivatele sale parțiale de ordinul I sunt continue şi pe o

vecinătate a lui $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$, fiind astfel verificate condițiile din teorema funcțiilor implicite; rezultă:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = -\frac{x}{z},\ \frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = -\frac{y}{z};$$

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y = -\frac{1}{z}\cdot(x\cdot \mathrm{d}x + y\cdot \mathrm{d}y);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{z}\right) = \frac{y^2 - a^2}{z^3},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{z}\right) = \frac{x^2 - a^2}{z^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{y}{z}\right) = -\frac{xy}{z^3},$$

de unde se obține:

$$\mathrm{d}^2 z = \frac{y^2 - a^2}{z^3}\cdot \mathrm{d}x^2 - 2\frac{xy}{z^3}\cdot \mathrm{d}x\cdot \mathrm{d}y + \frac{x^2 - a^2}{z^3}\cdot \mathrm{d}y^2;$$

c) $\mathrm{d}z = z\cdot\dfrac{\mathrm{d}x + \mathrm{d}y}{1-z},\ \mathrm{d}^2 z = z\cdot\dfrac{(\mathrm{d}x + \mathrm{d}y)^2}{(1-z)^3}.$

3.7.7 Funcțiile $u = \varphi(x,y),\ v = \psi(x,y)$ sunt definite implicit prin relațiile $u + v = x + y,\ x\cdot u + y\cdot v = 1$. Să se calculeze $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$.

Indicație de rezolvare:

Derivând în raport cu x cele două relații, obținem:

$$\frac{\partial}{\partial x}(u+v) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} = 1,\ \frac{\partial}{\partial x}(x\cdot u + y\cdot v) = u + x\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + y\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u+y}{y-x},\ \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{u+x}{x-y}.$$

Derivând cele două relații în raport cu y, obținem:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{v+y}{y-x},\ \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{v+x}{x-y}.$$

3.7.8 Fie funcția compusă $z = f(x, y)$, definită de $z = u^3 + v^3$, în care funcțiile $u(x,y)$ și $v(x,y)$ sunt definite implicit prin relațiile $u + v^2 = x$, $u^2 + v^2 = y$. Să se calculeze $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

Indicație de rezolvare:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = 3u^2 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + 3v^2 \cdot \frac{\partial v}{\partial x};$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = 3u^2 \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + 3v^2 \cdot \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Diferențiind relațiile de definiție, obținem:

$$\mathrm{d}u + 2 \cdot v \cdot \mathrm{d}v = \mathrm{d}x,\ 2 \cdot u \cdot \mathrm{d}u + 2 \cdot v \cdot \mathrm{d}v = \mathrm{d}y \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \mathrm{d}u = \frac{1}{1-2u}(\mathrm{d}x - \mathrm{d}y),\ \mathrm{d}v = -\frac{u}{v(1-2u)} \cdot \mathrm{d}x + \frac{1}{2v(1-2u)} \cdot \mathrm{d}y.$$

Rezultă

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{1-2u},\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{1-2u},\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{u}{v(1-2u)},\ \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2v(1-2u)}$$

și deci:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{3u(u-v)}{1-2u},\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3}{(1-2u)} \cdot \left(-3 \cdot u^2 + \frac{3}{2} \cdot v\right).$$

3.7.9 Să se calculeze $\mathrm{d}z$, dacă $z = u \cdot v,\ x = \mathrm{e}^{u+v},\ y = \mathrm{e}^{u-v}$.

Indicație de rezolvare:

$$\mathrm{d}z = \mathrm{d}(u \cdot v) = v \cdot \mathrm{d}u + u \cdot \mathrm{d}v.$$

Diferențiind relațiile care definesc pe $u(x,y)$ și $v(x,y)$, obținem:

$$\mathrm{d}x = (\mathrm{d}u + \mathrm{d}v) \cdot \mathrm{e}^{u+v},\ \mathrm{d}y = (\mathrm{d}u - \mathrm{d}v) \cdot \mathrm{e}^{u-v}\ .$$

Rezultă $\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}\mathrm{d}x + \frac{1}{y}\mathrm{d}y\right),\ \mathrm{d}v = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}\mathrm{d}x - \frac{1}{y}\mathrm{d}y\right)$, de unde:

$$\mathrm{d}z = \frac{1}{2x}(u+v)\mathrm{d}x + \frac{1}{2y}(v-u)\mathrm{d}y.$$

3.7.10 Fie funcţia $z = f(x, y)$ definită implicit prin $z \cdot \mathrm{e}^z = x \cdot \mathrm{e}^x + y \cdot \mathrm{e}^y$. Să se calculeze $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, dacă $u = \frac{x+z}{y+z}$.

Indicaţie de rezolvare:
Diferenţiind relaţia de definiţie a funcţiei implicite $z = f(x, y)$, obţinem:

$$(z+1)\cdot \mathrm{e}^z \cdot \mathrm{d}z = (x+1)\cdot \mathrm{e}^x \cdot \mathrm{d}x + (y+1)\cdot \mathrm{e}^y \cdot \mathrm{d}y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathrm{d}z = \frac{x+1}{z+1}\cdot \mathrm{e}^{x-z}\cdot \mathrm{d}x + \frac{y+1}{z+1}\cdot \mathrm{e}^{y-z}\cdot \mathrm{d}y.$$

În acelaşi timp avem

$$\mathrm{d}u = \mathrm{d}\left(\frac{x+z}{y+z}\right) = \frac{(y+z)(\mathrm{d}x+\mathrm{d}z)-(x+z)(\mathrm{d}y+\mathrm{d}z)}{(y+z)^2} =$$

$$= \frac{1}{(y+z)^2}\left\{\left[(y+z)+(y-x)\frac{x+1}{z+1}\cdot \mathrm{e}^{x-z}\right]\cdot \mathrm{d}x + \left[-(x+z)+(y-z)\frac{y+1}{z+1}\cdot \mathrm{e}^{y-z}\right]\cdot \mathrm{d}y\right\}.$$

Rezultă

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{(y+z)^2}\left[(y+z)+(y-x)\frac{x+1}{z+1}\cdot \mathrm{e}^{x-z}\right]$$

şi

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{(y+z)^2}\left[-(x+z)+(y-z)\frac{y+1}{z+1}\cdot \mathrm{e}^{y-z}\right].$$

3.7.11 Fie funcţiile $f(x,y,z) = x+y+z$, $g(x,y,z) = x-y+z$ şi $h(x,y,z) = 4\cdot(x\cdot y + y\cdot z)$ definite pe $\mathbb{R}^3$. Să se cerceteze dependenţa funcţională a acestor funcţii.

Indicaţie de rezolvare:

Matricea funcţională a lui Jacobi: $\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4y & 4(x+z) & 4y \end{pmatrix}$

are rangul doi, deci cele trei funcţii sunt dependente funcţional. Două dintre funcţii, f şi g, sunt independente funcţional, iar a treia, h, este dependentă funcţional de acestea.

3.7.12 Să se cerceteze dependența funcțională a funcțiilor:

a) $y_1 = \dfrac{a \cdot x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $y_2 = \dfrac{b \cdot y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ definite pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$;

b) $y_1 = x + y + z$, $y_2 = x^2 + y^2 + z^2 - x \cdot y - y \cdot z - x \cdot z$

şi

$y_3 = x^3 + y^3 + z^3 - 3 \cdot x \cdot y \cdot z$ definite pe $\mathbb{R}^3$;

c) $y_1 = \dfrac{1}{(x-y)(x-z)}$, $y_2 = \dfrac{1}{(y-z)(y-x)}$,

$y_3 = \dfrac{1}{(z-x)(z-y)}$, $x \neq y \neq z$.

Indicație de rezolvare:

a) matricea lui Jacobi este: $\dfrac{1}{\left(x^2 + y^2\right)^{3/2}} \begin{pmatrix} ay^2 & -axy \\ -bxy & bx^2 \end{pmatrix}$ şi are rangul 1;

funcțiile sunt dependente funcțional: $\left(\dfrac{y_1}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{y_2}{b}\right)^2 = 1$;

b) $y_3 = y_1 \cdot y_2$;

c) $y_1 + y_2 + y_3 = 0$.

5.7.13 Să se determine extremele funcției $f(x,y) = x^2 + y^2 - y - x$ condiționate de $x + y = 1$.

Indicație de rezolvare:

Se consideră funcția lui Lagrange:

$$L(x,y) = f(x,y) + \lambda \cdot g(x,y), \text{ unde } g(x,y) = x + y - 1.$$

$$L(x,y) = x^2 + y^2 - y - x + \lambda \cdot (x + y - 1).$$

Se rezolvă sistemul de forma:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2 \cdot x - 1 + \lambda = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 2 \cdot y - 1 + \lambda = 0; \\ x + y = 1, \end{cases}$$

de unde se obțin soluțiile: $\lambda = 0$, $x = y = \dfrac{1}{2}$.

Deoarece $\mathrm{d}^2L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=2\cdot \mathrm{d}x^2+2\cdot \mathrm{d}y^2>0$, punctul $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ este de minim.

3.7.14 Să se determine extremele legate pentru funcțiile:

a) $f(x,y,z)=x-2y+2z,\ x^2+y^2+z^2=9$;

b) $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2,\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ a>b>c>0$;

c) $f(x,y,z)=x+2y-2z,\ x^2+y^2+z^2=16$;

d) $f(x,y,z)=x+y+z,\ x-y+z=2,\ x^2+y^2+z^2=4$;

e) $f(x,y,z)=x\cdot y\cdot z,\ x^2+y^2+z^2=1,\ x+y+z=0$.

Indicație de rezolvare:

a) se consideră $L(x,y,z)=x-2y+2z+\lambda\left(x^2+y^2+z^2-9\right)$ și se rezolvă sistemul:

$$\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial x}=0\\ \frac{\partial L}{\partial y}=0\\ \frac{\partial L}{\partial z}=0\\ x^2+y^2+z^2=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1+2\cdot\lambda\cdot x=0\\ -2+2\cdot\lambda\cdot y=0\\ 2+2\cdot\lambda\cdot z=0\\ x^2+y^2+z^2=9\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-\frac{1}{2\lambda}\\ y=\frac{1}{\lambda}\\ z=-\frac{1}{\lambda}\\ x^2+y^2+z^2=9\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_1=-\frac{1}{2},\ \lambda_2=\frac{1}{2};$$

se obțin punctele $\mathrm{A}(1,-2,2)$, $\mathrm{B}(-1,2,-2)$ și se determină

$$\mathrm{d}^2L=2\lambda\mathrm{d}x^2+2\lambda\mathrm{d}y^2+2\lambda\mathrm{d}z^2,$$

de unde rezultă că punctul A este de maxim, iar B de minim;

b) $\lambda_1=-a^2\Rightarrow \mathrm{A}(a,0,0)$, $\mathrm{B}(-a,0,0)$ sunt puncte de maxim,

$\lambda_2=-c^2\Rightarrow \mathrm{C}(0,0,c)$, $\mathrm{D}(0,0,-c)$ sunt puncte de minim;

c) $\lambda_1=-\frac{3}{8}\Rightarrow \mathrm{A}\left(\frac{4}{3},\frac{8}{3},-\frac{8}{3}\right)$ este punct de maxim;

$\lambda_2=\frac{3}{8}\Rightarrow \mathrm{B}\left(-\frac{4}{3},-\frac{8}{3},\frac{8}{3}\right)$ este punct de minim;

d) se consideră

$$L(x,y,z)=x+y+z+\lambda(x-y+z-2)+\mu(x^2+y^2+z^2-4)$$

şi se rezolvă sistemul:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial z}=0\\ x-y+z-2=0\\ x^2+y^2+z^2-4=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1+\lambda+2\mu\cdot x=0\\ 1-\lambda+2\mu\cdot y=0\\ 1+\lambda+2\mu\cdot z=0\\ x-y+z-2=0\\ x^2+y^2+z^2-4=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=-\dfrac{\lambda+1}{2\mu};\\ y=\dfrac{\lambda-1}{2\mu};\\ z=-\dfrac{\lambda+1}{2\mu};\end{cases}$$

rezultă $\lambda_1=\frac{1}{3},\ \mu_1=-\frac{1}{2}\Rightarrow \mathrm{A}\left(\frac{4}{3},\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$ punct de maxim şi $\lambda_2=-1,\ \mu_2=\frac{1}{2}\Rightarrow$ $\mathrm{B}(0,-2,0)$ punct de minim;

e) $\lambda_1=-\frac{\sqrt{6}}{12},\ \mu_1=\frac{1}{6}\Rightarrow \mathrm{A}\left(-\frac{\sqrt{6}}{6},-\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{3}\right),\ \mathrm{B}\left(-\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{3},-\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$ şi $\mathrm{C}\left(\frac{\sqrt{6}}{3},-\frac{\sqrt{6}}{6},-\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$ sunt puncte de maxim;

$\lambda_2=\frac{\sqrt{6}}{12},\ \mu_2=\frac{1}{6}\Rightarrow \mathrm{D}\left(\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{6},-\frac{\sqrt{6}}{3}\right),\ \mathrm{E}\left(\frac{\sqrt{6}}{6},-\frac{\sqrt{6}}{3},\frac{\sqrt{6}}{6}\right),\ \mathrm{F}\left(-\frac{\sqrt{6}}{3},\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$ sunt puncte de minim.

3.7.15 Ce devin ecuaţiile următoare dacă se fac schimbările de variabilă indicate?

a) $x^3\cdot y'''+x\cdot y'-y=0,\ x=\mathrm{e}^t$;

b) $(x+1)^3\cdot y''+3(x+1)^2\cdot y'+(x+1)\cdot y=\ln(x+1),\ \ln(x+1)=t$;

c) $(1-x^2)\cdot y''-x\cdot y'+\omega^2\cdot y=0,\ x=\cos t$;

d) $(1+x^2)^2\cdot y''+2x(1+x^2)\cdot y'+y=0,\ x=\mathrm{tg}\,t$;

e) $x(1+x^2)\cdot y''-\left(1-x^2\cdot y\cdot\sqrt{1+x^2}\right)\cdot y'-x^3\cdot y^2=0,\ t=\sqrt{1+x^2}$.

Indicaţie de rezolvare:

a)

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dt}\cdot e^{-t},\ y'' = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\cdot e^{-t}\right)\cdot e^{-t} = \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)\cdot e^{-2t};$$

$$y''' = \frac{d}{dt}\left[\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)\cdot e^{-2t}\right]\cdot e^{-t} = \left(\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right)\cdot e^{-3t};$$

înlocuind derivatele lui y în ecuația dată, se va obține noua ecuație:

$$\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} - y = 0;$$

b) $\ln(x+1) = t \Rightarrow x+1 = e^t \Rightarrow x = e^t - 1;$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dt}\cdot e^{-t},$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\cdot e^{-t}\right)\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{d^2y}{dt^2}\cdot e^{-2t} - \frac{dy}{dt}\cdot e^{-2t};$$

înlocuind derivatele lui y în ecuația dată, se obține noua ecuație:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + y = t\cdot e^{-t};$$

c) $\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2\cdot y = 0;$

d) $\frac{d^2y}{dt^2} + y = 0;$

e) $x = \sqrt{t^2-1} \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{\sqrt{t^2-1}}{t};$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\cdot\frac{\sqrt{t^2-1}}{t}\right)\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{\sqrt{t^2-1}}{t}\cdot\frac{\sqrt{t^2-1}}{t} +$$

$$+\frac{dy}{dt}\cdot\frac{\sqrt{t^2-1}}{t}\cdot\frac{1}{t^2\sqrt{t^2-1}} = \frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{t^2-1}{t^2} + \frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{t^3};$$

înlocuind derivatele lui y în ecuația dată, se va obține noua ecuație:

$$\frac{d^2y}{dt^2}+y\cdot\frac{dy}{dt}-y^2=0.$$

3.7.16 Ce devin ecuațiile următoare dacă se schimbă funcția după cum urmează:

a) $x\cdot y'-y(\ln x\cdot y-1)=0,\ y=\frac{z}{x};$

b) $x^2\cdot y''+4x\cdot y'+\left(2-x^2\right)\cdot y=4x,\ y=\frac{z}{x^2};$

c) $x^2\cdot y''+x\cdot y'+\left(x^2-\lambda^2\right)\cdot y=0,\ y=\frac{z}{\sqrt{x}}.$

Indicație de rezolvare:

a) $y'=\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{z}{x}\right)=\frac{z'\cdot x-z}{x^2}\Rightarrow x\cdot z'-z\ln z=0;$

b) $z''-z=4x;$

c) $y'=\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{z}{\sqrt{x}}\right)=\frac{2x\cdot z'-z}{2x\sqrt{x}};$

$$y''=\frac{d}{dx}\left(\frac{2x\cdot z'-z}{2x\sqrt{x}}\right)=\frac{4x^2\sqrt{x}\cdot z''-4x\sqrt{x}\cdot z'+3z\sqrt{x}}{4x^3};$$

înlocuind derivatele lui y în ecuația dată, se va obține ecuația:

$$x^2\cdot z''+z\left(\frac{1}{4}+x^2-\lambda^2\right)=0.$$

3.7.17 Ce devine expresia diferențială:

$$E=\left(a^2+x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx},$$

dacă se face schimbarea de variabilă $x=a\cdot \operatorname{sh} t$?

Răspuns: $E=\frac{d^2y}{dt^2}.$

3.7.18 Ce devine expresia $E=\frac{\left(1-x^2\right)\cdot y''-x\cdot y'}{\sqrt{1-x^2}\cdot y'+y}$, dacă se face $x=\sin t$?

Indicație de rezolvare:

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{1}{\cos t};$$

$$y'' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{1}{\cos t}\right) \cdot \frac{1}{\cos t} = \frac{\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}\cos t + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\sin t}{\cos^3 t}.$$

După înlocuirea derivatelor lui y în expresia dată se va obține:

$$E = \frac{\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + y}.$$

3.7.19 În ecuația $y''(1+y^2) - 2(1+y)\cdot(y')^2 - (1+y^2) = 0$, unde y este o funcție de x, se face schimbarea $y = \mathrm{tg}\, z$. Să se găsească ecuația verificată de $z(x)$.

Răspuns: $z'' - 2(z')^2 - \cos^2 z = 0$.

3.7.20 Ce devine raza de curbură $R = \frac{\left[1+(y')^2\right]^{3/2}}{y''}$, dacă se schimbă rolul variabilelor?

Indicație de rezolvare:

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}} = \frac{1}{x'},\ y'' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x'}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{1}{x'}\right) \cdot \frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}} = -\frac{x''}{(x')^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R = \frac{\left(1+(x')^2\right)^{3/2}}{|x''|}.$$

3.7.21 Ce devin următoarele ecuații dacă se schimbă rolul variabilelor?

a) $y'' + x\cdot(y')^3 = 0$;

b) $y'' - (y')^2 + 2x \cdot (y')^3$.

Indicație de rezolvare:

a) $y' = \frac{1}{x'},\ y'' = -\frac{x''}{(x')^3} \Rightarrow x'' - x = 0$ este noua ecuație;

b) $x'' + x' - 2x = 0$.

3.7.22 În ecuația $x \cdot y'' - \frac{x}{y} \cdot (y')^2 + y' = 0$ se consideră $x = y \cdot \mathrm{e}^z$. Să se afle ecuația pe care o verifică $z(y)$.

Indicație de rezolvare:

$$y' = \frac{1}{x'},\ y'' = -\frac{x''}{(x')^3},\ \text{unde } x' = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(y \cdot \mathrm{e}^z\right) = \mathrm{e}^z + y \cdot z' \cdot \mathrm{e}^z$$

şi $$x'' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\mathrm{e}^z + y \cdot z' \cdot \mathrm{e}^z\right) = 2 \cdot z' \cdot \mathrm{e}^z + y \cdot z'' \cdot \mathrm{e}^z + y \cdot (z')^2 \cdot \mathrm{e}^z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{\mathrm{e}^z (1 + y \cdot z')},\ y'' = -\frac{\mathrm{e}^z \left(2 \cdot z' + y \cdot z'' + y \cdot (z')^2\right)}{\mathrm{e}^{3z} (1 + y \cdot z')^3}$$

Înlocuind derivatele lui y şi pe x în ecuația dată, se va obține noua ecuație de forma $y \cdot z'' + z' = 0$.

3.7.23 În expresiile diferențiale următoare, să se facă schimbarea de variabilă şi de funcție indicate:

a) $E = \frac{x \cdot y' - y}{x + y \cdot y'},\ \begin{cases} x = \rho \cos t \\ y = \rho \sin t \end{cases},\ \rho = \rho(t)$;

b) $E = \frac{x \cdot y' - y}{\sqrt{1 + (y')^2}},\ \begin{cases} x = \rho \cos t \\ y = \rho \sin t \end{cases},\ \rho = \rho(t)$;

c) $E = \frac{(y')^2 - y \cdot y''}{y^2},\ \begin{cases} x = v - u \\ y = \mathrm{e}^{u+v} \end{cases},\ v = v(u)$.

Indicație de rezolvare:

a) $$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho \sin t) \cdot \frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho \sin t) \cdot \frac{1}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho \cos t)} = \frac{\rho' \sin t + \rho \cos t}{\rho' \cos t - \rho \sin t};$$

înlocuind în expresia dată, se va obține noua expresie $E=\dfrac{\rho}{\rho'}$;

b) $E=\dfrac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}}$;

c) $y'=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(\mathrm{e}^{u+v}\right)\cdot\dfrac{1}{\dfrac{\mathrm{d}(v-u)}{\mathrm{d}u}}=\dfrac{v'+1}{v'-1}\cdot\mathrm{e}^{u+v}$;

$$y''=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(\frac{v'+1}{v'-1}\cdot\mathrm{e}^{u+v}\right)\cdot\frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}(v-u)}{\mathrm{d}u}}=\mathrm{e}^{u+v}\cdot\left[\frac{(v'+1)^2-2\cdot v''}{(v'-1)^2}\right].$$

Efectuând înlocuirile, se obține expresia $E=\dfrac{2\cdot v''}{(v'-1)^2}$.

3.7.24 Să se scrie ecuația razei de curbură din coordonate carteziene, $R=\dfrac{\left[1+(y')^2\right]^{3/2}}{y''}$, în coordonate polare.

Răspuns: $R=\dfrac{\left(\rho^2+\rho'^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''}$.

3.7.25 Să se treacă de la coordonate carteziene la coordonate polare, în ecuația:

$$\left(x^2+y^2\right)\left(x+y\cdot y'\right)=\left(x^2+y^2+x\right)\left(x\cdot y'-y\right).$$

Indicație de rezolvare:

Se consideră transformarea: $\begin{cases}x=\rho\cos t\\ y=\rho\sin t\end{cases}$, $\rho=\rho(t)$.

Atunci $y'=\dfrac{\rho'\sin t+\rho\cos t}{\rho'\cos t-\rho\sin t}$ şi, efectuând înlocuirile, se va obține ecuația:

$$\rho'=\rho+\cos t.$$

3.7.26 În ecuația diferențială:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y\left(x^2+y^2+1\right)}{x\left(x^2+y^2-1\right)}$$

să se facă schimbarea $\begin{cases} u=x^2-y^2 \\ v=2\cdot x\cdot y \end{cases}$, $v=v(u)$.

Indicație de rezolvare:

Diferențiind formulele care dau schimbarea, obținem:

$$\mathrm{d}u=2\cdot x\mathrm{d}x-2\cdot y\mathrm{d}y,$$
$$\mathrm{d}v=2\cdot x\mathrm{d}y+2\cdot y\mathrm{d}x,$$

de unde rezultă $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}=\dfrac{x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x}{x\mathrm{d}x-y\mathrm{d}y}$.

În acelaşi timp, din ecuația dată rezultă:

$$\frac{x\mathrm{d}y}{y\mathrm{d}x}=\frac{x^2+y^2+1}{x^2+y^2-1};$$
$$\frac{y\mathrm{d}y}{x\mathrm{d}x}=\frac{y^2\left(x^2+y^2+1\right)}{x^2\left(x^2+y^2-1\right)}.$$

Aplicând proprietățile proporțiilor, obținem:

$$x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x=\frac{2y\left(x^2+y^2\right)\cdot\mathrm{d}x}{x^2+y^2-1};$$
$$\frac{1}{x\mathrm{d}x-y\mathrm{d}y}=\frac{y\left(x^2+y^2+1\right)}{\left(x^2+y^2\right)\left(x^2-y^2-1\right)}\cdot\frac{1}{\mathrm{d}y}.$$

Prin înmulțirea ultimelor două relații obținem:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}=\frac{2xy}{x^2-y^2-1}=\frac{v}{u-1}.$$

3.7.27 În ecuațiile care urmează să se facă schimbările indicate la fiecare

a) $x\cdot y\cdot y''-x\cdot\left(y'\right)^2+y^2=0,$ $\begin{cases} x=\mathrm{e}^t; \\ y=\mathrm{e}^u, \end{cases}$ $u=u(t);$

b) $2\cdot y'' + (x+y)(1-y')^3 = 0,\ \begin{cases} x-y=u; \\ x+y=v(u); \end{cases}$

c) $\left(1-x^2\right)\cdot y'' - 3\cdot x\cdot y' + \left(a^2-1\right)\cdot y = 0,\ \begin{cases} x=\sin t; \\ y=\dfrac{z}{\cos t}, \end{cases}\ z=z(t);$

d) $2\cdot y'''(1+y') - 6\cdot(y'')^2 + y''(y'-1)^2 = 0,\ \begin{cases} x=\dfrac{u+v}{2}; \\ y=\dfrac{u-v}{2}, \end{cases}\ v=v(u).$

Indicație de rezolvare:

a) $y' = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^u\right)\cdot\dfrac{1}{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^t\right)} = \mathrm{e}^{u-t}\cdot u';$

$$y'' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{u-t}\cdot u'\right)\cdot\mathrm{e}^{-t} = \mathrm{e}^{u-2t}\cdot\left[u'' + (u')^2 - u'\right];$$

efectuând înlocuirile, obținem ecuația: $u'' - u' + \mathrm{e}^t = 0$;

b) $v'' + v = 0$;

c) $z'' + a^2\cdot z = 0$;

d) $y' = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(\dfrac{u-v}{2}\right)\cdot\dfrac{1}{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(\dfrac{u+v}{2}\right)} = \dfrac{1-v'}{1+v'};$

$$y'' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(\frac{1-v'}{1+v'}\right)\cdot\frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(\dfrac{u+v}{2}\right)} = -4\cdot\frac{v''}{(v'+1)^3};$$

$$y''' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(-4\cdot\frac{v''}{(v'+1)^3}\right)\cdot\frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(\dfrac{u+v}{2}\right)} = -8\cdot\frac{v'''(v'+1) - 3\cdot(v'')^2}{(v'+1)^5}.$$

Înlocuind, se obține ecuația: $2\cdot v''' + v''\cdot v' = 0$.

3.7.28 Luând u şi v ca noi variabile independente, să se transforme următoarele ecuații:

a) $y\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x} - x\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0,\ u=x,\ v=x^2+y^2;$

b) $x\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+y\cdot\frac{\partial z}{\partial y}-z=0,\ u=x,\ v=\frac{y}{x};$

c) $(x+y)\frac{\partial z}{\partial x}-(x-y)\frac{\partial z}{\partial y}=0,\ u=\ln\sqrt{x^2+y^2},\ v=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}.$

Indicație de rezolvare:

a) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y};$

rezultă că $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}+2\cdot x\frac{\partial z}{\partial v},\ \frac{\partial z}{\partial y}=2\cdot y\frac{\partial z}{\partial v}\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial u}=0$ este ecuația transformată;

b) $u\cdot\frac{\partial z}{\partial u}-z=0;$

c)

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{x^2+y^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{y}{x^2+y^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial v},\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{x^2+y^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{x}{x^2+y^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{\partial z}{\partial v}=0.$$

3.7.29 Să se transforme expresia $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$, considerând:

$$\begin{cases}x=u\cdot v;\\ y=\frac{1}{2}\left(u^2-v^2\right).\end{cases}$$

Indicație de rezolvare:

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot v+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot u,$$
$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot u-\frac{\partial z}{\partial y}\cdot v.$$

Astfel, $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{v\frac{\partial z}{\partial u}+u\frac{\partial z}{\partial v}}{u^2+v^2},\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{u\frac{\partial z}{\partial u}-v\frac{\partial z}{\partial v}}{u^2+v^2}$, de unde rezultă expresia transformată: $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=\frac{\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2}{u^2+v^2}.$

3.7.30 Luând pe u şi v ca noi variabile independente, să se transforme următoarele ecuaţii:

a) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-4\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,\ u=3\cdot x+y,\ v=x+y$;

b) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\cos x\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\sin^2 x\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\sin x\frac{\partial z}{\partial y}=0;$

$$\begin{cases} u=\sin x+x-y; \\ v=x-\sin x+y; \end{cases}$$

c) $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,\ \frac{x}{y}=u,\ x\cdot y=v$;

d) $x\cdot y\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+x\frac{\partial z}{\partial x}+2\cdot y\frac{\partial z}{\partial y}=0,\ u=x,\ v=\frac{y}{x}$;

e) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-4\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+4\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,\ u=2\cdot x+y,\ v=y$.

Indicaţie de rezolvare:

a)

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=3\cdot\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial u}\left(3\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\right)\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial v}\left(3\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\right)\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=$$

$$=9\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+6\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=3\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+4\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2};$$

înlocuind, se obţine ecuaţia $\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$;

b) $\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$;

c) $2 \cdot v \dfrac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} - \dfrac{\partial z}{\partial u} = 0$;

d) $v \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \dfrac{\partial z}{\partial u} = 0$;

e) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0$.

3.7.31 **a)** Dacă $f, g \in C^2(\mathbb{R})$ şi $z(x,y) = y \cdot f(x+y) + x \cdot g(x,y)$, atunci $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

b) Considerând u şi v ca noi variabile independente şi w ca noua funcție, să se transforme ecuația de la punctul a), dacă:

$$u = x + y,\ v = \frac{y}{x},\ w = \frac{z}{x}.$$

Indicație de rezolvare:

a) pentru $u = x + y \Rightarrow \dfrac{\partial z}{\partial x} = y \cdot \dfrac{\partial f}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} + g + x \cdot \dfrac{\partial g}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} = y \cdot f' + g + x \cdot g'$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f + y \cdot f' + x \cdot g'$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y \cdot f'' + 2 \cdot g' + x \cdot g''$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f' + y \cdot f'' + g' + x \cdot g''$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2 \cdot f' + y \cdot f'' + x \cdot g'',$$

înlocuind derivatele parțiale ale lui z în ecuația dată, aceasta este verificată;

b) $\dfrac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 0$.

Test de autoevaluare

1 Să se determine extremele funcţiei $z = f(x, y)$, definită implicit prin:

a) $x^2 + y^2 + z^2 - 2 \cdot x + 4 \cdot y - 6 \cdot z - 11 = 0$;

b) $x^2 + y^2 + z^2 - x \cdot z - y \cdot z + 2 \cdot x + 2 \cdot y + 2 \cdot z - 2 = 0$.

2 Să se arate că funcţiile:

$$y_1 = x + y + z,\ y_2 = x^3 + y^3 + z^3 + 6 \cdot x \cdot y \cdot z$$

şi

$$y_3 = x \cdot y(x + y) + y \cdot z(y + z) + z \cdot x(z + x)$$

sunt dependente funcţional pe $\mathbb{R}^3$. Care este relaţia de dependenţă?

3 Să se determine extremele funcţiei $f(x, y)$ cu legăturile indicate:

a) $f(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y},\ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2}$;

b) $f(x,y) = x^2 + y^2,\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$;

c) $f(x,y) = (x-1)^2 + y^2,\ x^2 - y^2 = 1$;

d) $f(x,y) = x \cdot y,\ x + y = 1$;

e) $f(x,y) = x + 2 \cdot y,\ x^2 + y^2 = 5$.

4 Să se determine valoarea maximă şi valoarea minimă pentru:

a) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 3 \cdot x - 2 \cdot y + 1,\ x^2 + y^2 \le 1$;

b) $f(x,y) = 5 \cdot x^2 + 3 \cdot x \cdot y + y^2,\ x^2 + y^2 \le 1$.

5 Să se transforme în coordonate polare, făcând înlocuirile: $x = r \cdot \cos\theta$, $y = r \cdot \sin\theta$, următoarele expresii:

a) $E = x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y}$;

b) $E = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$;

c) $E = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$;

d) $E = x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \cdot x \cdot y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

TEMĂ DE CONTROL

1 Să se scrie formula lui Taylor pentru:

a) $f(x,y) = -x^2 + 2\cdot x\cdot y + 3\cdot y^2 - 6\cdot x - 2\cdot y - 4$ în punctul $(-2,1)$;

b) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2\cdot x\cdot y - y\cdot z - 4\cdot x - 3\cdot y - z + 4$

în punctul $(1,1,1)$.

2 Să se determine extremele funcției:

a) $f(x,y,z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12\cdot x\cdot y + 2\cdot z,\ (x,y,z)\in \mathbb{R}^3$;

b) $f(x,y,z) = x\cdot y^2\cdot z^3\cdot(7 - x - 2\cdot y - 3\cdot z),\ x\cdot y\cdot z \neq 0$;

c) $f(x,y,z) = \left(x + z^2\right)\cdot \mathrm{e}^{x\left(y^2+z^2+1\right)},\ (x,y,z)\in \mathbb{R}^3$.

3 Să se arate că dacă funcția $z = f(x,y)$ este definită implicit prin $(y+z)\cdot \sin z - y\cdot(x+z) = 0$, atunci este satisfăcută ecuația:

$$z\cdot \sin z\cdot \frac{\partial z}{\partial x} - y^2\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

4 Fie funcțiile

$$f(x,y,z) = (x+y+z)^2,\ g(x,y,z) = 2\cdot x + y - 2\cdot z$$

şi

$$h(x,y,z) = 3\cdot x^2 + 2\cdot x\cdot y - 12\cdot x\cdot z - 18\cdot z\cdot y$$

definite pe $\mathbb{R}^3$. Să se arate că:

a) funcțiile *f*, *g* şi *h* nu sunt independente în origine;

b) există o vecinătate a punctului $\mathrm{M}_0(-1,0,1)$ pe care *f* depinde de *g* şi *h*.

5 Presupunând pe *u* şi *v* ca noi variabile independente şi pe *w* ca o nouă funcție, să se transforme în noile variabile următoarele ecuații:

a) $y\cdot\frac{\partial z}{\partial x} - x\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = (y-x)\cdot z$, dacă $\begin{cases} u = x^2 + y^2; \\ v = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}; \\ w = \ln z - (x+y); \end{cases}$

b) $x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=z^2$, dacă $\begin{cases} u=x; \\ v=\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}; \\ w=\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{x}; \end{cases}$

c) $(x\cdot y+z)\dfrac{\partial z}{\partial x}+\left(1-y^2\right)\dfrac{\partial z}{\partial y}=x+y\cdot z$, dacă $\begin{cases} u=y\cdot z-x; \\ v=x\cdot z-y; \\ w=x\cdot y-z; \end{cases}$

d) $\dfrac{\partial z}{\partial y}+\dfrac{1}{2}\cdot y\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{1}{x}$, dacă $\begin{cases} u=\dfrac{x}{y}; \\ v=x; \\ w=x\cdot z-y; \end{cases}$

e) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$, dacă $\begin{cases} u=x+y; \\ v=x-y; \\ w=x\cdot y-z. \end{cases}$

6 Ce devine expresia $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)^2$ în coordonate sferice $x=r\cdot\sin\varphi\cdot\cos\theta,\ y=r\cdot\sin\varphi\cdot\sin\theta,\ z=r\cdot\cos\varphi$?

BIBLIOGRAFIE RECOMANDATĂ PENTRU MODULUL 3

1. **I. Colojoară**, *Analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983
2. **M. Craiu, V. V. Tănase**, *Analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1980
3. **M. Craiu, M. Roşculeț**, *Culegere de probleme de analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1976
4. **N. Donciu, D. Flondor**, *Algebră şi analiză matematică*. Culegere de probleme, vol. I, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1978
5. **I. P. Elianu**, *Principii de analiză matematică*. Calcul diferențial, Editura Academiei Militare, Bucureşti, 1976
6. **P. Flondor, O. Stănăşilă**, *Lecții de analiză matematică*, Editura ALL, 1993
7. **M. Nicolescu, N. Dinculeanu, S. Marcus**, *Manual de Analiză matematică*, vol. I, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1966
8. **M. Roşculeț**, *Culegere de probleme de analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1968
9. **I. Sprințu**, *Elemente de analiză matematică*, Editura Academiei Tehnice Militare, Bucureşti, 2001
10. **O. Stănăşilă**, *Analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981

MODULUL 4

INTEGRAREA FUNCȚIILOR REALE DE O VARIABILĂ REALĂ

În acest modul sunt prezentate pe parcursul unei lecții principalele noțiuni teoretice referitoare la integrarea funcțiilor reale de o variabilă reală.

După parcurgerea lecției studenții vor dobândi cunoştinţele teoretice şi îşi vor forma deprinderile practice cu ajutorul cărora vor putea recunoaşte, înțelege şi rezolva probleme referitoare la:

- primitivele funcțiilor reale de o variabilă reală;
- integrabilitatea în sens Riemann;
- funcții cu variație mărginită;
- integrabilitatea Riemann-Stieltjes;
- metode şi algoritmi specifici de rezolvare a problemelor care se referă la aceste noțiuni.

Materialul trebuie parcurs în ordinea sa firească prezentată în cuprinsul modulului, inclusiv în porțiunea referitoare la aplicații. Metoda de studiu va fi cea specifică disciplinelor matematice, cu utilizarea expresă a adnotărilor făcute cu creionul pe tot parcursul textului. Pentru fiecare tip de exercițiu se recomandă identificarea algoritmului şi descompunerea acestuia în etape succesive. Se recomandă studierea soluțiilor problemelor rezolvate şi rezolvarea completă a problemelor propuse în testele de autoevaluare şi în tema de control.

Timpul mediu necesar parcurgerii şi însuşirii noțiunilor teoretice, algoritmilor de rezolvare a problemelor, formării deprinderilor practice de rezolvare şi dobândirii competențelor enumerate anterior este de aproximativ 6-8 ore de studiu, într-un ritm de 2-3 ore pe zi.

LECȚIA 1

INTEGRAREA FUNCȚIILOR REALE DE O VARIABILĂ REALĂ

5.1 Primitive

Fie funcția $f: I \to \mathbb{R}$, unde *I* este un interval, $I \subset \mathbb{R}$.

Definiția 5.1.1. Se numeşte ***primitivă*** a funcției *f* pe *I* orice funcție $F: I \to \mathbb{R}$, derivabilă pe *I* şi astfel încât $F'(x) = f(x),\ (\forall)\ x \in I$.

Observație. Dacă *F* este o primitivă a funcției *f* pe *I*, atunci $F + C$, unde *C* este constantă arbitrară, este o primitivă a lui f pe intervalul *I*.

Definiția 5.1.2. Fie intervalul $I \subset \mathbb{R}$ şi $f: I \to \mathbb{R}$. Dacă funcția f admite primitive, atunci mulțimea tuturor primitivelor sale se numeşte ***integrala nedefinită*** a lui f şi se notează cu $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

5.1.1 Calculul primitivelor cu ajutorul schimbării de variabilă

Fie funcțiile $u: I \to J$ şi $f: J \to \mathbb{R}$, astfel încât f este continuă pe *J*, iar *u* are derivata continuă pe *I*. Dacă $\int f(t)\,\mathrm{d}t = F(t) + C$, atunci:

$$\int f(u(x)) \cdot u'(x)\,\mathrm{d}x = F(u(x)) + C.$$

5.1.2 Metoda integrării prin părți

Fie $f, g: I \to \mathbb{R}$, cu derivate continue pe *I*. Atunci:

$$\int f \cdot g'\,\mathrm{d}x = f \cdot g - \int f' \cdot g\,\mathrm{d}x.$$

5.1.3 Primitivele funcțiilor raționale

Fie $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, cu $\text{grad}\,P<\text{grad}\,Q$.

Dacă $Q(x)=(x-x_1)^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot(x-x_k)^{\alpha_k}$, unde $x_j, j=\overline{1,k}$, sunt rădăcinile reale distincte ale polinomului Q, iar $\alpha_j\in\mathbb{N}, j=\overline{1,k}$, este ordinul de multiplicitate al rădăcinii x_j, atunci descompunerea în fracții simple a polinomului *R* este:

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{(x-x_1)}+\frac{A_2}{(x-x_1)^2}+\ldots+\frac{A_{\alpha_1}}{(x-x_1)^{\alpha_1}}+\ldots+$$

$$+\frac{L_1}{(x-x_k)}+\frac{L_2}{(x-x_k)^2}+\ldots+\frac{L_{\alpha_k}}{(x-x_k)^{\alpha_k}}.$$

Dacă polinomul *Q* are rădăcini complexe, de forma $a\pm \mathrm{i}\cdot b$ de ordin de multiplicitate *m*, atunci în descompunerea anterioară a lui *R* apar şi fracții simple de forma $\dfrac{A_1x+B_1}{x^2+px+q}+\ldots+\dfrac{A_mx+B_m}{\left(x^2+px+q\right)^m}$, unde:

$$x^2+px+q=(x-a-\mathrm{i}\cdot b)\cdot(x-a+\mathrm{i}\cdot b).$$

Dacă $\text{grad}\,P\geq\text{grad}\,Q$, atunci se face împărțirea, astfel că $R(x)=C(x)+\dfrac{P_1(x)}{Q(x)}$, cu $\text{grad}\,P_1<\text{grad}\,Q$ şi se reduce problema la cazul tratat anterior.

5.1.4 Integrale binome

Integralele binome sunt integralele de forma:

$$\int x^m\cdot\left(ax^n+b\right)^p\,\mathrm{d}x,\ m,n,p\in\mathbb{Q}.$$

Calculul primitivelor funcțiilor binomiale se reduce la calculul primitivelor funcțiilor raționale numai în următoarele cazuri stabilite de Cebîşev:

1) dacă $p\in\mathbb{Z}$, se face substituția $x=z^{\alpha}$, unde α este cel mai mic multiplu comun al numitorilor lui *m* şi *n*;

2) dacă $p \notin \mathbb{Z}$, dar $\dfrac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$, se va face substituția $ax^n + b = z^\beta$, unde β este numitorul lui p;

3) dacă $p \notin \mathbb{Z}$, $\dfrac{m+1}{n} \notin \mathbb{Z}$, dar $p + \dfrac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$, se va face substituția $\dfrac{ax^n + b}{x^n} = z^\beta$, unde β este numitorul lui p.

5.1.5 Integrale algebrice

Integralele algebrice sunt integralele de forma $\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) \mathrm{d}x$, unde $R(u,v)$ este o funcție rațională. Calculul integralelor algebrice se reduce la calculul primitivelor funcției raționale astfel:

1) dacă ecuația $ax^2 + bx + c = 0$ are rădăcinile reale x_1, x_2, se va face substituția $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t \cdot (x - x_1)$ $\{\text{sau } t \cdot (x - x_2)\}$;

2) dacă $a > 0$, se va face substituția $\sqrt{ax^2 + bx + c} = x\sqrt{a} + t$;

3) dacă $c > 0$, se va face substituția $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{c} + t \cdot x$.

5.2 Integrala Riemann

Fie $[a,b] \subset \mathbb{R}$.

Definiția 5.2.1. Numărul real $\ell([a,b]) \overset{\text{def}}{=} b - a$ se numeşte ***lungimea*** sau ***măsura*** intervalului $[a,b]$.

Definiția 5.2.2. Mulțimea $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ se numeşte ***diviziune*** a intervalului $[a,b]$.

Definiția 5.2.3. Fie $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ o diviziune a intervalului $[a,b]$. Numărul real $\|\Delta\| \overset{\text{def}}{=} \max\left\{\ell([x_k, x_{k+1}]),\ k = \overline{0, n-1}\right\}$, se numeşte ***norma diviziunii*** Δ.

Definiția 5.2.4. Fie $\Delta_1, \Delta_2 \in D([a,b])$. Diviziunea Δ_2 este ***mai fină*** decât diviziunea Δ_1, dacă $\Delta_1 \subset \Delta_2$.

Notație. Fie $D([a,b])$ mulțimea tuturor diviziunilor intervalului $[a,b]$.

Definiția 5.2.5. Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $\Delta=(a=x_0<x_1<...<x_{n-1}<x_n=b)$ şi un sistem de puncte intermediare $\xi=(\xi_0,\xi_1,...,\xi_{n-1})$, $\xi_k\in[x_k,x_{k+1}]$, pentru $(\forall)\ k=\overline{0,n-1}$. Numărul real $S(f,\Delta,\xi)=\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot(x_{k+1}-x_k)$ se numeşte ***sumă integrală Riemann*** corespunzătoare funcției *f*, diviziunii Δ şi sistemului de puncte intermediare ξ.

Definiția 5.2.6. Funcția $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ se numeşte ***integrabilă Riemann*** pe intervalul $[a,b]$ dacă şi numai dacă există $I\in\mathbb{R}$ cu proprietatea că pentru $(\forall)\ \varepsilon>0$, $(\exists)\ \delta(\varepsilon)>0$, astfel încât pentru $(\forall)\ \Delta\in D([a,b])$, cu $\|\Delta\|<\delta(\varepsilon)$, să avem $|I-S(f,\Delta,\xi)|<\varepsilon$, $(\forall)\ \xi$ sistem de puncte intermediare din $[a,b]$.

Observație. Numărul *I* definit anterior se numeşte ***integrala Riemann*** a funcției f pe $[a,b]$ şi se notează cu $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

5.2.1 Proprietățile ale funcțiilor integrabile pe $[a,b]$

1) Dacă funcția $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este integrabilă Riemann pe $[a,b]$, atunci ea este mărginită pe $[a,b]$.

Reciproca nu este adevărată.

2) Fie funcțiile $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrabile Riemann pe $[a,b]$ şi $\alpha,\ \beta\in\mathbb{R}$. Atunci funcția $\alpha\cdot f+\beta\cdot g:[a,b]\to\mathbb{R}$ este integrabilă Riemann şi

$$\int_a^b(\alpha f(x)+\beta g(x))\mathrm{d}x=\alpha\cdot\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\beta\cdot\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

3) $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x=0$.

4) Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}_+$ este integrabilă Riemann, atunci $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geq 0$.

5) Dacă $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ sunt integrabile Riemann şi $f\le g$ pe $[a,b]$, atunci $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\le\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

6) Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrabilă pe $[a,b]$. Atunci şi funcţia $|f(\cdot)|:[a,b]\to\mathbb{R}_+$ este integrabilă pe $[a,b]$ şi $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\le\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$.

7) Dacă funcţiile $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ sunt integrabile pe $[a,b]$, atunci şi funcţia produs $(f\cdot g):[a,b]\to\mathbb{R}$ este integrabilă pe $[a,b]$.

8) Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrabilă pe $[a,b]$ şi astfel încât $m\le f(x)\le M$, pentru $(\forall)x\in[a,b]$. Atunci $m(b-a)\le\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\le M(b-a)$ şi există $\mu\in[m,M]$, astfel încât $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\mu(b-a)$ (***prima formulă de medie***).

9) Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continuă pe $[a,b]$. Atunci există un punct $c\in[a,b]$, astfel încât $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(b-a)\cdot f(c)$ (***a doua formulă de medie***).

10) Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrabilă pe $[a,b]$ şi $a<c<b$. Atunci f este integrabilă şi pe $[a,c]$ şi pe $[c,b]$ şi $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$.

11) Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrabilă pe $[a,b]$ şi F o primitivă a lui f pe $[a,b]$. Atunci are loc ***formula lui Leibniz-Newton***: $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$.

12) Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrabilă pe $[a,b]$.

Atunci funcţia $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ este continuă pe $[a,b]$.

13) Dacă funcția $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este continuă pe $[a,b]$, atunci funcția $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ este derivabilă pe $[a,b]$ şi avem $F'(x)=f(x)$, $(\forall)\ x\in[a,b]$.

5.2.2 Aplicații ale integralei definite în geometrie şi mecanică

1) Calculul ariei unui domeniu plan

Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Pentru a determina aria domeniului plan mărginit de graficul funcției *f*, de axa o*x* şi de dreptele paralele la axa o*y*, duse prin punctele $x=a$ şi $x=b$, considerăm o diviziune $\Delta=(a=x_0<x_1<...<x_{n-1}<x_n=b)$ şi punctele arbitrare $M_i(\xi_i)$, $\xi_i\in(x_i,x_{i+1}]$, $i=\overline{0,n-1}$. Aria corespunzătoare intervalului $(x_i,x_{i+1}]$ o aproximăm prin aria dreptunghiului, deci va fi de forma $[x_i,x_{i+1}]\cdot f(\xi_i)$. Însumând, obținem $A=\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\cdot(x_{i+1}-x_i)$, care este o sumă integrală Riemann, iar pentru un şir de diviziuni $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cu $\|\Delta_n\|\xrightarrow{n\to\infty}0$, suma integrală obținută va tinde la $A=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Observație. Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ şi $f(x)\le 0$, $(\forall)\ x\in[a,b]$, atunci $A=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ reprezintă aria domeniului considerat mai sus, luat cu semnul minus.

Astfel, dacă funcția $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ schimbă semnul pe intervalul $[a,b]$, aria domeniului mărginit de graficul lui *f*, de $[a,b]$ şi de dreptele de ecuații $x=a$, $x=b$, este dată de $A=\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$.

2) Aria unui domeniu plan mărginit de o curbă dată în coordonate polare

Fie $r = f(\theta)$, $\theta \in [a,b]$, ecuația în coordonate polare a unui arc de curbă şi vrem să calculăm aria domeniului plan mărginit de acest arc de curbă şi de dreptele de ecuații $r = f(a)$, $r = f(b)$, care trec prin originea sistemului de axe de coordonate considerat şi care formează cu axa ox unghiurile a şi, respectiv, b.

Se consideră diviziunea $\Delta = (a = \theta_0 < \theta_1 < ... < \theta_{n-1} < \theta_n = b)$ şi $m_k = \inf_{\theta \in [\theta_k, \theta_{k+1}]} f(\theta)$, $M_k = \sup_{\theta \in [\theta_k, \theta_{k+1}]} f(\theta)$.

Fie sumele Darboux de forma $s_\Delta = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} m_k^2 \cdot (\theta_{k+1} - \theta_k)$ şi $S_\Delta = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} M_k^2 \cdot (\theta_{k+1} - \theta_k)$.

Aria domeniului considerat verifică $s_\Delta \le A \le S_\Delta$, deci pentru un şir de diviziuni $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cu $\|\Delta_n\| \xrightarrow{n \to \infty} 0$ şi pentru f^2 integrabilă, şirurile $(s_{\Delta_n})_{n \in \mathbb{N}}$, $(S_{\Delta_n})_{n \in \mathbb{N}}$ converg către valoarea ariei căutate $A = \frac{1}{2} \cdot \int_a^b f^2(\theta) \mathrm{d}\theta$.

3) Aria unei suprafețe de rotație

Fie funcția $f : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ continuă şi cu derivata continuă pe $[a,b]$.

Vrem să calculăm aria suprafeței generată prin rotația graficului funcției f în jurul axei ox.

Fie o diviziune $\Delta = (a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b)$ şi punctele $M_k = f(x_k)$, $(\forall)\ k = \overline{0, n-1}$. Aproximăm aria obținută prin rotația arcului $M_k M_{k+1}$ în jurul axei ox prin aria laterală a trunchiului de con obținut prin rotația segmentului $M_k M_{k+1}$ în jurul axei ox.

Acest trunchi de con are aria laterală:

$$\omega_k = 2\pi \cdot \frac{y_k + y_{k+1}}{2} \cdot \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (y_{k+1} - y_k)^2}.$$

Cum

$$y_{k+1} - y_k = f(x_{k+1}) - f(x_k) = (x_{k+1} - x_k) \cdot f'(\xi_k),$$

unde $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$, rezultă că

$$\omega_k = 2\pi \cdot \frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2} \cdot \sqrt{1+f'^2(\xi_k)} \cdot (x_{k+1}-x_k)$$

şi aria A este de forma

$$A_\Delta = \sum_{k=0}^{n-1} 2\pi \cdot \frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2} \cdot \sqrt{1+f'^2(\xi_k)} \cdot (x_{k+1}-x_k).$$

În continuare se arată că pentru

$$S_\Delta = \sum_{k=0}^{n-1} 2\pi \cdot f(\xi_k) \cdot \sqrt{1+f'^2(\xi_k)} \cdot (x_{k+1}-x_k),$$

şirurile $\left(A_{\Delta_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $\left(S_{\Delta_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converg către aceeaşi limită pentru un şir de diviziuni $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cu norma $\|\Delta_n\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$$\begin{aligned}
&\left|A_\Delta - S_\Delta\right| = \\
&= 2\pi \cdot \left| \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(x_k)-f(\xi_k)+f(x_{k+1})-f(\xi_k)}{2} \cdot \sqrt{1+f'^2(\xi_k)} \cdot (x_{k+1}-x_k) \right| \le \\
&\le 2\pi \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\left|f(x_k)-f(\xi_k)\right|+\left|f(x_{k+1})-f(\xi_k)\right|}{2} \cdot \sqrt{1+f'^2(\xi_k)} \cdot (x_{k+1}-x_k).
\end{aligned}$$

Funcţia f fiind continuă, ea este şi uniform continuă şi deci, pentru $(\forall)\ \varepsilon > 0$, $(\exists)\ \eta(\varepsilon) > 0$, astfel încât pentru orice x', x'' care verifică $\left|x'-x''\right| < \eta(\varepsilon)$, să avem $\left|f(x')-f(x'')\right| < \varepsilon$.

Astfel, alegând o diviziune Δ, pentru care $\|\Delta\| < \eta(\varepsilon)$, avem $\left|x_k-\xi_k\right| < \eta(\varepsilon)$ şi $\left|x_{k+1}-\xi_k\right| < \eta(\varepsilon)$, putem scrie că

$$\left|A_\Delta - S_\Delta\right| < 2\pi\varepsilon \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1+f'^2(\xi_k)} \cdot (x_{k+1}-x_k).$$

Deoarece f' este continuă, rezultă că există $M > 0$, astfel încât $\sqrt{1+f'^2(\xi_k)} < M$, $(\forall)\ k = \overline{0,n-1}$ şi deci $\left|A_\Delta - S_\Delta\right| \le 2\pi\varepsilon M(b-a)$.

Astfel, pentru un şir de diviziuni $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cu norma $\|\Delta_n\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$, avem

$$\lim_{\|\Delta_n\|\to 0} A_{\Delta_n} = \lim_{\|\Delta_n\|\to 0} S_{\Delta_n} = 2\pi \cdot \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1+f'^2(x)}\, \mathrm{d}x.$$

Rezultă că $A = 2\pi \cdot \int\limits_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + f'^2(x)}\,\mathrm{d}x$.

4) Volumul corpurilor de rotație

Fie funcția $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ şi C_f corpul de rotație determinat de *f*. Corpul C_f are volum, dacă există două şiruri $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de mulțimi cilindrice elementare, fiecare G_n şi H_n fiind determinate de funcțiile constante pe porțiuni $g_n, h_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, astfel încât $G_n \subset C_f \subset H_n$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{vol}(G_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{vol}(H_n)$.

În acest caz, se defineşte volumul:

$$\mathrm{vol}(C_f) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{vol}(G_n) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{vol}(H_n).$$

Fie un şir de diviziuni $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de forma

$$\Delta_n = \left(a = x_0^n < x_1^n < \ldots < x_{p_n}^n = b\right),$$

astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} \|\Delta_n\| = 0$.

Fie $m_i^n = \inf\limits_{x\in\left[x_{i-1}^n,\, x_i^n\right]} f(x)$ şi $M_i^n = \sup\limits_{x\in\left[x_{i-1}^n,\, x_i^n\right]} f(x)$.

Rezultă că există $u_i^n,\ v_i^n \in \left[x_{i-1}^n,\, x_i^n\right]$, astfel încât $m_i^n = f\left(u_i^n\right)$, $M_i^n = f\left(v_i^n\right)$.

Pentru $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$, definim funcțiile constante pe porțiuni de forma:

$$g_n(x) = \begin{cases} m_i^n, & \text{pentru } x \in \left(x_{i-1}^n,\, x_i^n\right); \\ f(x_i), & \text{pentru } x = x_i \end{cases}$$

şi

$$h_n(x) = \begin{cases} M_i^n, & \text{pentru } x \in \left(x_{i-1}^n,\, x_i^n\right); \\ f(x_i), & \text{pentru } x = x_i. \end{cases}$$

Avem

$$\mathrm{vol}(G_n) = \pi \cdot \sum_{i=1}^{p_n} f^2\left(u_i^n\right) \cdot \left(x_i^n - x_{i-1}^n\right)$$

şi

$$\text{vol}(H_n) = \pi \cdot \sum_{i=1}^{p_n} f^2(v_i^n) \cdot (x_i^n - x_{i-1}^n).$$

Cum funcția f este continuă, rezultă că şi f^2 este continuă, deci integrabilă şi avem $\lim\limits_{n\to\infty} \text{vol}(G_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \text{vol}(H_n) = \pi \cdot \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$.

Obținem astfel că $\text{vol}(C_f) = \pi \cdot \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$.

5) Lungimea unui arc de curbă

Fie funcția $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, cu derivata continuă pe $[a,b]$.

Pentru o diviziune $\Delta = (a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b)$ a intervalului $[a,b]$ se consideră funcția $f_\Delta:[a,b] \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f_\Delta(x) = f(x_{i-1}) + \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \cdot (x - x_{i-1}), \quad (\forall) x \in [x_{i-1}, x_i],$$

numită ***funcția poligonală*** asociată lui f şi diviziunii Δ.

Distanța dintre punctele $A_i(x_i, f(x_i))$ şi $A_{i-1}(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ ale funcției poligonale asociată, este $d(A_{i-1}, A_i) = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}$, iar numărul pozitiv $\ell(f_\Delta) = \sum\limits_{i=1}^{n} d(A_{i-1}, A_i)$ se numeşte ***lungimea graficului*** funcției poligonale f_Δ.

Graficul funcției $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, continuă, are lungimea finită, dacă există $M \geq 0$, astfel încât $\ell(f_\Delta) \leq M$, pentru orice diviziune Δ a intervalului $[a,b]$, iar $\sup\left\{\ell(f_\Delta) \,\middle|\, \Delta \in D([a,b])\right\} = \ell(f)$ se numeşte ***lungimea graficului*** funcției *f*.

Pentru orice diviziune $\Delta = (a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b)$ a lui $[a,b]$, avem că pentru $(\forall)$ $i = \overline{1,n}$, $(\exists)$ $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, astfel încât:

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}).$$

Rezultă:

$$\ell(f_\Delta)=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\left(x_i-x_{i-1}\right)^2+\left(f\left(x_i\right)-f\left(x_{i-1}\right)\right)^2}=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\left(f'(\xi_i)\right)^2}\cdot\left(x_i-x_{i-1}\right)\le M\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-x_{i-1}\right)=M\left(b-a\right).$$

Fie un şir de diviziuni $\left(\Delta_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, de forma

$$\Delta_n=\left(a=x_0^n<x_1^n<\ldots<x_{p_n}^n=b\right), \text{ astfel încât } \lim_{n\to\infty}\left\|\Delta_n\right\|=0.$$

Procedând ca mai sus, rezultă că există punctele $\xi_i^n\in\left[x_{i-1}^n,x_i^n\right]$, astfel încât $f\left(x_i^n\right)-f\left(x_{i-1}^n\right)=f'\left(\xi_i^n\right)\cdot\left(x_i^n-x_{i-1}^n\right)$.

Rezultă că $\ell\left(f_{\Delta_n}\right)=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\left(f'\left(\xi_i^n\right)\right)^2}\cdot\left(x_i^n-x_{i-1}^n\right)$ şi deci lungimea graficului funcției f este $\ell(f)=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{d}x$.

6) Coordonatele centrului de greutate

Fie funcțiile $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ continue şi astfel încât $f\le g$.

Se consideră mulțimea $\Gamma_{f,g}\overset{\text{def}}{=}\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,\middle|\,a\le x\le b, f(x)\le y\le g(x)\right\}$ cuprinsă între graficele funcțiilor f şi g şi dreptele paralele la oy care intersectează axa ox în punctele a şi, respectiv, b.

În continuare, se vor determina coordonatele centrelor de greutate ale plăcilor plane şi omogene ce se identifică cu mulțimi din plan de forma $\Gamma_{f,g}$.

Fie diviziunea $\Delta=\left(a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b\right)$, ξ_i mijlocul intervalului $\left[x_{i-1},x_i\right]$, deci $\xi_i=\frac{1}{2}\cdot\left(x_i-x_{i-1}\right)$, $(\forall)\ i=\overline{1,n}$.

Aria dreptunghiului $D_i=\left[x_{i-1},x_i\right]\times\left[f\left(\xi_i\right),g\left(\xi_i\right)\right]$ este de forma

$$\text{aria}\left(D_i\right)=\left(x_i-x_{i-1}\right)\cdot\left(g\left(\xi_i\right)-f\left(\xi_i\right)\right).$$

Dacă norma diviziunii $\Delta=\left(a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b\right)$ este suficient de mică, mulțimea

$$\Gamma_i \overset{\text{def}}{=} \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_{i-1} \le x \le x_i,\ f(x) \le y \le g(x) \right\}$$

se aproximează cu dreptunghiul D_i, deci centrul de greutate al mulțimii Γ_i se va aproxima cu centrul de greutate al dreptunghiului D_i.

Rezultă că centrul de greutate al mulțimii $\Gamma_{f,g} = \bigcup_{i=1}^{n} \Gamma_i$ se va aproxima cu centrul de greutate al mulțimii elementare $E_\Delta = \bigcup_{i=1}^{n} D_i$.

Deoarece coordonatele centrului de greutate pentru D_i sunt $\overline{x}_i = \xi_i$, $\overline{y}_i = \frac{1}{2} \cdot \left[g(\xi_i) - f(\xi_i) \right]$, rezultă că centrul de greutate al lui $E_\Delta = \bigcup_{i=1}^{n} D_i$ va avea coordonatele:

$$\overline{x}_\Delta = \frac{\sum_{i=1}^{n} \text{aria}(D_i) \cdot \overline{x}_i}{\sum_{i=1}^{n} \text{aria}(D_i)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \xi_i \cdot \left[g(\xi_i) - f(\xi_i) \right] \cdot (x_i - x_{i-1})}{\sum_{i=1}^{n} \left[g(\xi_i) - f(\xi_i) \right] \cdot (x_i - x_{i-1})}$$

şi

$$\overline{y}_\Delta = \frac{\sum_{i=1}^{n} \text{aria}(D_i) \cdot \overline{y}_i}{\sum_{i=1}^{n} \text{aria}(D_i)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left[g^2(\xi_i) - f^2(\xi_i) \right] \cdot (x_i - x_{i-1})}{\sum_{i=1}^{n} \left[g(\xi_i) - f(\xi_i) \right] \cdot (x_i - x_{i-1})}.$$

Astfel, pentru o placă plană *A* care se identifică cu o mulțime de forma $\Gamma_{f,g}$, unde $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sunt continue, centrul de greutate al lui *A*, este punctul de coordonate (x_G, y_G), unde:

$$x_G = \frac{\int_a^b x \cdot \left[g(x) - f(x) \right] \mathrm{d}x}{\int_a^b \left[g(x) - f(x) \right] \mathrm{d}x} \quad \text{şi} \quad y_G = \frac{\frac{1}{2} \cdot \int_a^b \left[g^2(x) - f^2(x) \right] \mathrm{d}x}{\int_a^b \left[g(x) - f(x) \right] \mathrm{d}x}.$$

În cazul în care $f \equiv 0,\ g \ge 0$, obținem:

$$x_G = \frac{\int_a^b x \cdot g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} \quad \text{şi} \quad y_G = \frac{\frac{1}{2}\cdot\int_a^b g^2(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}.$$

5.3 Funcţii cu variaţie mărginită

Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ şi $\Delta=(a=x_0<x_1<\ldots<x_{n-1}<x_n=b)$ o ***diviziune*** a intervalului $[a,b]$.

Definiţia 5.3.1. Numărul $V_\Delta=\sum_{i=0}^{n-1}\left|f(x_{i+1})-f(x_i)\right|$ se numeşte ***variaţia*** lui f relativ la diviziunea Δ.

Teorema 5.3.2. Dacă diviziunea Δ_2 este mai fină ca diviziunea Δ_1, atunci $V_{\Delta_1}\le V_{\Delta_2}$.

Definiţia 5.3.3. O funcţie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este ***cu variaţie mărginită*** pe intervalul $[a,b]$, dacă există $M\in\mathbb{R}$, astfel încât pentru orice diviziune $\Delta\in D([a,b])$ să avem $V_\Delta\le M$.

Marginea superioară a mulţimii $\left\{V_\Delta \,\middle|\, \Delta\in D([a,b])\right\}$ se numeşte ***variaţia totală*** a funcţiei f pe $[a,b]$ şi se notează cu $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f)$.

Teorema 5.3.4. O funcţie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ monotonă şi continuă pe $[a,b]$ este cu variaţie mărginită pe $[a,b]$.

Teorema 5.3.5. O funcţie lipschitziană pe $[a,b]$ (adică $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, astfel încât pentru $(\forall)\ x',x''\in[a,b]$, să se verifice $\left|f(x')-f(x'')\right|\le k\cdot\left|x'-x''\right|$) este cu variaţie mărginită pe $[a,b]$.

Consecinţă. Orice funcţie derivabilă şi cu derivata mărginită pe un interval $[a,b]$ este cu variaţie mărginită pe $[a,b]$.

Propoziția 5.3.6. Dacă $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sunt cu variație mărginită pe intervalul $[a,b]$, atunci și funcția $\alpha \cdot f + \beta \cdot g$ va fi cu variație mărginită pe $[a,b]$.

Propoziția 5.3.7. Dacă $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ este cu variație mărginită pe $[a,b]$ și $[c,d] \subset [a,b]$, atunci f este cu variație mărginită pe $[c,d]$.

Corolar. Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ cu variație mărginită pe $[a,b]$. Atunci funcția $V(x) = \overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f)$ este crescătoare pe $[a,b]$.

Teorema de structură a lui Jordan

Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ cu variație mărginită pe $[a,b]$. Atunci există două funcții crescătoare $\varphi, \psi : [a,b] \to \mathbb{R}$, astfel încât:

$$f(x) = \varphi(x) - \psi(x),\ (\forall)\ x \in [a,b].$$

Consecințe:

1) Dacă f și g sunt cu variație mărginită pe $[a,b]$, atunci funcția $f \cdot g$ este cu variație mărginită pe $[a,b]$.

Aceasta rezultă scriind $f = u_1 - v_1$, $g = u_2 - v_2$, unde funcțiile u_1, u_2, v_1, v_2 sunt crescătoare pe $[a,b]$.

Atunci $f \cdot g = (u_1 - v_1) \cdot (u_2 - v_2) = (u_1 \cdot u_2 + v_1 \cdot v_2) - (u_1 \cdot v_2 + u_2 \cdot v_1)$.

2) O funcție cu variație mărginită pe $[a,b]$ este mărginită pe $[a,b]$.

3) Dacă $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ este cu variație mărginită pe $[a,b]$, atunci f este integrabilă.

4) Dacă $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ este derivabilă și cu derivata integrabilă, atunci $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f) = \int_a^b |f'(x)| \mathrm{d}x$.

Exemple

1) Funcția $f(x)=\begin{cases}\ln x, & \text{pentru } x\in(0,1)\\ 0, & \text{pentru } x=0\end{cases}$ nu este cu variație mărginită, deoarece ea nu este mărginită.

2) Funcția $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{arctg}\left(1-x^3\right)$ este cu variație mărginită, deoarece este derivabilă pe $[-1,1]$ şi cu derivata de forma: $f'(x)=\dfrac{-3x^2}{1+\left(1-x^3\right)^2}$, deci $\left|f'(x)\right|=\dfrac{3x^2}{1+\left(1-x^3\right)^2}$ este mărginită.

5.4 Definiția integralei Riemann-Stieltjes

Fie $f, g:[a,b]\to\mathbb{R}$, f mărginită pe $[a,b]$, iar g crescătoare. Pentru fiecare diviziune $\Delta=\{a=t_0<t_1<...<t_{n-1}<t_n=b\}$ definim:

$$s(f,g;\Delta)=\sum_{j=1}^{n} m_j\cdot\left(g\left(t_j\right)-g\left(t_{j-1}\right)\right), \text{ unde } m_j=\inf_{x\in\left[t_{j-1},t_j\right]} f(x)$$

şi

$$S(f,g;\Delta)=\sum_{j=1}^{n} M_j\cdot\left(g\left(t_j\right)-g\left(t_{j-1}\right)\right), \text{ unde } M_j=\sup_{x\in\left[t_{j-1},t_j\right]} f(x).$$

Definiția 5.4.1. $s(f,g;\Delta)$ se numeşte ***suma Darboux inferioară***, iar $S(f,g;\Delta)$ se numeşte ***suma Darboux superioară***.

Definiția 5.4.2. Funcția f se numeşte ***integrabilă Riemann-Stieltjes*** în raport cu g pe $[a,b]$, dacă pentru $(\forall)\ \varepsilon>0$, $(\exists)\ \Delta\in D([a,b])$, astfel încât:

$$S(f,g;\Delta)-s(f,g;\Delta)<\varepsilon.$$

Definiția 5.4.3. Pentru orice diviziune $\Delta\in D([a,b])$ se defineşte numărul $\mu(\Delta)=\max\limits_{1\le i\le n}(t_i-t_{i-1})$, care se numeşte ***diametrul diviziunii*** Δ.

Propoziția 5.4.4. Dacă $\Delta\subset\Delta^*$, atunci:

$$s(f,g;\Delta)\le s\left(f,g;\Delta^*\right)\le S\left(f,g;\Delta^*\right)\le S(f,g;\Delta).$$

Teorema 5.4.5. Fie funcția f integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu g pe intervalul $[a,b]$. Atunci există un număr unic $\gamma\in\mathbb{R}$, astfel încât:

$$s(f,g;\Delta)\le\gamma\le S(f,g;\Delta),\ (\forall)\ \Delta\in D([a,b]).$$

Observație. Numărul $\gamma\in\mathbb{R}$ se numeşte ***integrala Riemann-Stieltjes*** a funcției f în raport cu g şi se notează cu $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}g(x)$.

Observație. Dacă $g:[a,b]\to\mathbb{R}$, $g(x)=x$, numărul $\gamma=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ este ***integrala Riemann*** a funcției f pe $[a,b]$.

Observație. Fie $\Delta\in D([a,b])$, $\Delta=\{a=x_0<x_1<...<x_n=b\}$. Alegem punctele intermediare $\xi_1,\ \xi_2,...,\ \xi_n$, astfel încât $\xi_i\in[x_i,x_{i+1}]$, $(\forall)\ i=\overline{1,n-1}$ şi formăm sumele $\sigma(f,g;\Delta)=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot(g(x_i)-g(x_{i-1}))$.

Se observă că $s(f,g;\Delta)<\sigma(f,g;\Delta)<S(f,g;\Delta)$, deoarece:

$$m_i<f(\xi_i)<M_i,\ (\forall)\ i=\overline{1,n}.$$

Teorema 5.4.6. Dacă $\lim\limits_{\mu(\Delta)\to 0}\sigma(f,g;\Delta)$ există, atunci funcția f este integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu *g* pe $[a,b]$ şi

$$\lim_{\mu(\Delta)\to 0}\sigma(f,g;\Delta)=\int_a^b f\mathrm{d}g=\gamma.$$

5.5 Proprietăți ale integralei Riemann-Stieltjes

Teorema 5.5.1. Dacă funcțiile f_1 şi f_2 sunt integrabile Riemann-Stieltjes în raport cu *g* pe $[a,b]$, atunci (f_1+f_2) este integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu *g* pe $[a,b]$ şi $\int_a^b (f_1+f_2)\mathrm{d}g=\int_a^b f_1\mathrm{d}g+\int_a^b f_2\mathrm{d}g$.

Teorema 5.5.2. Dacă funcția *f* este integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu *g* pe $[a,b]$ şi $c\in\mathbb{R}$, atunci funcția $(c\cdot f)$ este integrabilă Riemann-Stieltjes în raport *g* pe $[a,b]$ şi $\int_a^b (c\cdot f)\mathrm{d}g=c\cdot\int_a^b f\mathrm{d}g$.

Teorema 5.5.3. Dacă funcția *f* este integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu *g* pe $[a,b]$ şi $f(x)\geq 0,\ (\forall)\ x\in[a,b]$, atunci $\int_a^b f\mathrm{d}g\geq 0$.

Teorema 5.5.4. Fie funcția f integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu g pe $[a,b]$ şi $c\in(a,b)$. Atunci f este integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu g pe $[a,c]$ şi pe $[c,b]$ şi $\int_a^b f\,\mathrm{d}g=\int_a^c f\,\mathrm{d}g+\int_c^b f\,\mathrm{d}g$.

Teorema 5.5.5. Dacă funcția f este integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu g_1 şi cu g_2 pe $[a,b]$, atunci f este integrabilă Riemann-Stieltjes pe $[a,b]$ în raport cu $g=\alpha\cdot g_1+\beta\cdot g_2$, $(\forall)$ α, $\beta\in\mathbb{R}$ şi $\int_a^b f\,\mathrm{d}g=\alpha\cdot\int_a^b f\,\mathrm{d}g_1+\beta\cdot\int_a^b f\,\mathrm{d}g_2$.

Teorema 5.5.6. Dacă funcția f este integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu g pe $[a,b]$, atunci şi funcția g este integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu f pe $[a,b]$ şi $\int_a^b f\,\mathrm{d}g=f(b)\cdot g(b)-f(a)\cdot g(a)-\int_a^b g\,\mathrm{d}f$.

Teorema 5.5.7. Fie $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$, f de clasă C^0 şi g cu variație mărginită pe $[a,b]$. Fie $c\in(a,b)$, astfel încât g este continuă pe $[a,b]\setminus\{c\}$, c un punct de discontinuitate de prima speță.

Atunci:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g(x)=\lim_{\lambda\nearrow c}\int_a^\lambda f(x)\,\mathrm{d}g(x)+$$

$$+\lim_{\lambda\searrow c}\int_\lambda^b f(x)\,\mathrm{d}g(x)+f(c)\left[g(c+0)-g(c-0)\right].$$

Observație. Formula din teorema 5.5.7 rămâne valabilă şi în cazul în care $c=a$ sau $c=b$.

Teorema 5.5.8. Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ şi $g:[a,b]\to\mathbb{R}$, astfel încât f şi g' sunt integrabile Riemann pe $[a,b]$. Atunci f este integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu g pe $[a,b]$ şi $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g(x)=\int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x$.

Observație. Teorema 5.5.8 constă în reducerea unei integrale Riemann-Stieltjes la o integrală Riemann.

Teorema 5.5.9 (***Prima formulă de medie***). Dacă funcția *f* este continuă pe $[a,b]$, iar g este monoton crescătoare pe $[a,b]$, atunci există un punct $\xi \in [a,b]$, astfel încât $\int_a^b f\,\mathrm{d}g = f(\xi)\cdot\left[g(b)-g(a)\right]$.

Teorema 5.5.10 (***A doua formulă de medie***). Dacă funcția f este monotonă și g este cu variație mărginită și continuă pe $[a,b]$, atunci există un punct $\xi \in [a,b]$, astfel încât

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}g = f(a)\cdot\left[g(\xi)-g(a)\right]+f(b)\cdot\left[g(b)-g(\xi)\right].$$

5.6 Aplicații

5.6.1 Să se calculeze:

a) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$; **b)** $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{1+x^4}}$; **c)** $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}}$;

d) $\int \frac{\mathrm{e}^{x/2}}{\mathrm{e}^{x/6}\cdot\left(\mathrm{e}^{x/3}+1\right)}\mathrm{d}x$; **e)** $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)\cdot\sqrt{x^2-3x+2}}$;

f) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}$; **g)** $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\cdot\sqrt{x^2+x+1}}$.

Indicație de rezolvare:

a) se consideră $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \int x^{-1/2}\cdot\left(1+x^{1/4}\right)^{1/3}\mathrm{d}x$, deci este o integrală binomă și se identifică $p=\frac{1}{3}\notin \mathbb{Z}$, $m=-\frac{1}{2}$, $n=\frac{1}{4}$; observându-se că $\frac{m+1}{n}\in \mathbb{Z}$, se va face substituția $x^{1/4}+1=z^3$, deci $x=\left(z^3-1\right)^4$ și rezultă că $\mathrm{d}x = 4\left(z^3-1\right)^3\cdot 3z^2\mathrm{d}z$.

Integrala devine

$$\int 12\cdot z^3\left(z^3-1\right)\mathrm{d}z=12\cdot\frac{z^7}{7}-12\cdot\frac{z^4}{4}+C=$$
$$=\frac{12}{7}\cdot\left(x^{1/4}+1\right)^{7/3}-3\cdot\left(x^{1/4}+1\right)^{4/3}+C;$$

b) $I=\frac{1}{4}\cdot\ln\frac{\left(1+x^{-4}\right)^{1/4}+1}{\left(1+x^{-4}\right)^{1/4}-1}-\frac{1}{2}\cdot\operatorname{arctg}\left(1+x^{-4}\right)^{1/4}+C;$

c) integrala se scrie $I=\int(2x-1)^{-1/4}\cdot\left[(2x-1)^{1/4}-1\right]^{-1}\mathrm{d}x$. Este o integrală binomă şi se fac identificările $m=-\frac{1}{4},\ n=\frac{1}{4},\ p=-1\in\mathbb{Z}$. Se va face substituția $(2x-1)=z^4$, de unde rezultă $x=\frac{1}{2}\cdot z^4+\frac{1}{2}$, $\mathrm{d}x=2z^3\mathrm{d}z$.

Integrala devine

$$I=\int\frac{2z^3}{z^2-z}\mathrm{d}z=2\cdot\int\frac{z^2}{z-1}\mathrm{d}z=2\cdot\int(z+1)\mathrm{d}z+2\cdot\int\frac{1}{z-1}\mathrm{d}z;$$

rezultă $I=(2x-1)^{1/2}+2(2x-1)^{1/4}+2\ln\left|(2x-1)^{1/4}-1\right|+C$;

d) integrala se scrie $I=\int \mathrm{e}^{x/3}\cdot\left(\mathrm{e}^{x/3}+1\right)^{-1}\mathrm{d}x$; se fac identificările $m=\frac{1}{3},\ n=\frac{1}{3},\ p=-1\in\mathbb{Z}$ şi se va face substituția $\mathrm{e}^x=z^3$. Integrala devine $I=3\cdot\int\frac{1}{z+1}\mathrm{d}z=3\cdot\ln|z+1|+C$, deci $I=3\cdot\ln\left(\mathrm{e}^{x/3}+1\right)+C$;

e) $x^2-3x+2=(x-1)\cdot(x-2)$ şi se va face substituția $\sqrt{x^2-3x+2}=t\cdot(x-1)$; obținem $x=\frac{t^2-2}{t^2-1}$, $\mathrm{d}x=\frac{2t}{\left(t^2-1\right)^2}\mathrm{d}t$, iar integrala devine $I=2\int\mathrm{d}t=2t+C$, deci $I=2\cdot\left(\frac{x-2}{x-1}\right)^{1/2}+C$;

f) se face substituția $\sqrt{x^2+2x+2}=x+t$, ceea ce implică $x=\frac{t^2-2}{2-2t}$ şi $\mathrm{d}x=\frac{-2t^2+4t-4}{(2-2t)^2}\mathrm{d}t$; integrala devine:

$$I=\int\frac{t^2-2t+2}{t^2(1-t)}\mathrm{d}t=\int\left(\frac{2}{t^2}-\frac{1}{1-t}\right)\mathrm{d}t=-\frac{2}{t}-\ln|t-1|+C,$$

deci

$$I=-\frac{1}{x+1}\left(x+\sqrt{x^2+2x+2}\right)+\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right)+C;$$

g) se va face substituția $\sqrt{x^2+x+1}=1+tx$, de unde rezultă $x=\dfrac{1-2t}{t^2-1}$ şi $\mathrm{d}x=\dfrac{2\left(t^2-t+1\right)}{\left(t^2-1\right)^2}\mathrm{d}t$; integrala devine $I=\displaystyle\int(-2)\frac{\mathrm{d}t}{t^2-2t}=-2\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t-2}\right)\mathrm{d}t$;

obținem astfel $I=\ln\left|\sqrt{x^2+x+1}-1\right|-\ln\left|\sqrt{x^2+x+1}-1-2x\right|+C$.

5.6.2 Să se calculeze ariile mărginite de:

a) graficul funcției $f(x)=\mathrm{e}^{-x}\cdot\sin x$, axa o$x$ şi dreptele de ecuații $x=0$, $x=2\pi$;

b) graficul funcției $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$, axa o$x$ şi dreptele de ecuații $x=1$, $x=2$.

Indicații de rezolvare:

a) $A=\displaystyle\int_0^{2\pi}|f(x)|\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-x}\cdot\sin x\,\mathrm{d}x-\int_{\pi}^{2\pi}\mathrm{e}^{-x}\cdot\sin x\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-\pi}+\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{e}^{-2\pi}}{2}$;

b) $A=\ln\left(2-\sqrt{3}\right)+\sqrt{3}$;

5.6.3 Să se calculeze lungimea curbei de ecuație $f(x)=2\ln x$, $x\in\left[2,2\sqrt{3}\right]$.

Indicație de rezolvare:

$f'(x)=\dfrac{2}{x}$, $1+f'^2(x)=\dfrac{x^2+4}{x^2}$, deci $L=\displaystyle\int_2^{2\sqrt{3}}\frac{1}{x}\cdot\sqrt{x^2+4}\,\mathrm{d}x$, care se calculează cu substituția $x=2\,\mathrm{tg}\,t$.

Obținem astfel $L=2\left(\ln\left(\mathrm{tg}\dfrac{\pi}{6}\right)-\ln\left(\mathrm{tg}\dfrac{\pi}{8}\right)+2-\sqrt{2}\right)$.

5.6.4 Să se calculeze coordonatele centrelor de greutate ale suprafețelor mărginite de: $f(x)=\dfrac{x^4}{\sqrt{1-x^2}}$, axa o$x$ şi dreptele de ecuații $x=0,\ x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

Indicație de rezolvare:

$$\int_0^{\sqrt{2}/2}\frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/4}\sin^4 t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\cdot\int_0^{\pi/4}(1-\cos 2t)^2\,\mathrm{d}t=\frac{3\pi}{32}-\frac{1}{4};$$

similar obținem

$$\int_0^{\sqrt{2}/2}xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\sqrt{2}/2}\frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/4}\sin^5 t\,\mathrm{d}t=\frac{8}{15}-\frac{43}{60\sqrt{2}};$$

$$\int_0^{\sqrt{2}/2}f^2(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\sqrt{2}/2}\left(-x^6-x^4-x^2-1-\frac{1}{x^2-1}\right)\mathrm{d}x=$$

$$=-\frac{1037}{840\sqrt{2}}+\ln\left(\sqrt{2}+1\right);$$

5.6.5 Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotirea curbei:

a) $y=\sin x,\ x\in[0,\pi]$ în jurul axei ox;

b) $y=x\ln x,\ x\in[1,\mathrm{e}]$ în jurul axei ox.

Indicații de rezolvare:

a) $V=\pi\cdot\displaystyle\int_0^{\pi}\sin^2 x\,\mathrm{d}x=\pi\cdot\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{2}$;

b) $V=\dfrac{\pi}{27}\left(5\mathrm{e}^3-2\right)$.

5.6.6 Să se stabilească care dintre următoarele funcții este cu variație mărginită:

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{(x-1)^2}, & \text{pentru } x\in[0,1);\\ 0, & \text{pentru } x=1;\end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} 2x, & \text{pentru } x\in[0,3); \\ 7, & \text{pentru } x=3; \\ x^2, & \text{pentru } x\in(3,6]; \end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases} x^2\cdot \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}, & \text{pentru } x\in(0,1]; \\ 0, & \text{pentru } x=0. \end{cases}$

Indicație de rezolvare:

a) funcția f nu este mărginită, deci nu este cu variație mărginită;

b) funcția f este crescătoare şi mărginită pe domeniul de definiție, deci este cu variație mărginită;

c) funcția f este derivabilă, iar derivata ei este de forma:

$$f'(x)=\begin{cases} 2x\cdot \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}-\dfrac{x^2}{1+x^2}, & \text{pentru } x\in(0,1]; \\ 0, & \text{pentru } x=0, \end{cases}$$

care este continuă pe intervalul $[0,1]$, deci f este cu variație mărginită.

5.6.7 Fie funcția $f(x)=\begin{cases} x\cdot\cos\dfrac{\pi}{2x}, & \text{pentru } x\in(0,1]; \\ 0, & \text{pentru } x=0. \end{cases}$

Să se arate că f este continuă, dar nu este cu variație mărginită.

Indicație de rezolvare:

Funcția f este continuă pe $(0,1]$, ca fiind compunere de funcții elementare. Pentru $x=0$ avem $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\cos\dfrac{\pi}{2x}=0=f(0)$, deci f este continuă şi în origine.

Se demonstrează că f nu este cu variație mărginită folosind definiția. Se alege un şir de diviziuni $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pentru intervalul $[0,1]$, de forma:

$$\Delta_n:\ 0<\frac{1}{2n}<\frac{1}{2n-1}<\ldots<\frac{1}{2k}<\frac{1}{2k-1}<\ldots<\frac{1}{2}<1.$$

Variația lui f relativ la diviziunea Δ_n va fi:

$$V_{\Delta_n}(f)=\left|f(0)-f\left(\frac{1}{2}\right)\right|+\left|f\left(\frac{1}{2n}\right)-f\left(\frac{1}{2n-1}\right)\right|+\ldots+\left|f\left(\frac{1}{2}\right)-f(1)\right|.$$

Avem $f(0)=0, f\left(\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{2n}\cdot\cos n\pi=\pm\frac{1}{2n}$ şi

$$f\left(\frac{1}{2n-1}\right)=\frac{1}{2n-1}\cdot\cos(2n-1)\cdot\frac{\pi}{2}=0.$$

Rezultă că $V_{\Delta_n}(f)=1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}$ şi cum seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ este divergentă, şirul sumelor parţiale este divergent, deci $\left(V_{\Delta_n}(f)\right)_n$ este divergent, iar funcţia f nu este cu variaţie mărginită.

5.6.8 Să se arate că următoarele funcţii sunt cu variaţie mărginită şi să se calculeze variaţia totală:

a) $f:[-1,2]\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x-|x|}{1+x+|x|}$;

b) $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases} x\sin x+\cos x, & \text{pentru } x\in[0,\pi]; \\ -\text{arctg}\frac{1}{x}, & \text{pentru } x\in(\pi,2\pi]; \end{cases}$

Indicaţie de rezolvare:

a) $f(x)=\begin{cases} 2x, & \text{pentru } x\in[-1,0); \\ 0, & \text{pentru } x\in[0,2]; \end{cases}$

rezultă că funcţia f este monotonă pe $[-1,2]$, deci este cu variaţie mărginită;

$$\overset{2}{\underset{-1}{V}} f(x)=\overset{0}{\underset{-1}{V}}(2x)=|f(0)-f(-1)|=2;$$

b) f este monotonă pe porţiuni, deci este cu variaţie mărginită pe $[0,2\pi]$;

$$\overset{2\pi}{\underset{0}{V}} f(x)=\left|f\left(\frac{\pi}{2}\right)-f(0)\right|+\left|f(\pi)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right|+|f(2\pi)-f(\pi)|=$$

$$=\pi+1-\text{arctg}\frac{1}{2\pi};$$

5.6.9 Să se calculeze $I=\int_0^{2/\pi} f(x)\mathrm{d}f(x)$, unde:

$$f(x)=\begin{cases} x^2\cdot\sin\dfrac{1}{x}, & \text{pentru } x\in\left(0,\dfrac{2}{\pi}\right];\\ 0, & \text{pentru } x=0.\end{cases}$$

Indicație de rezolvare:

Funcția f este derivabilă și cu derivata mărginită, deoarece $f'(x)=2x\cdot\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}$, pentru $x\in\left(0,\dfrac{2}{\pi}\right]$, iar $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$.

În acelaşi timp, $|f'(x)|\le|2x|+1\le\dfrac{4}{\pi}+1$, pentru $x\in\left(0,\dfrac{2}{\pi}\right]$, iar $|f'(0)|=0$.

Rezultă că funcția f este cu variație mărginită pe domeniul de definiție şi deci integrala Riemann-Stieltjes există.

$$\int_0^{2/\pi} f(x)\mathrm{d}f(x)+\int_0^{2/\pi} f(x)\mathrm{d}f(x)=f\left(\frac{2}{\pi}\right)\cdot f\left(\frac{2}{\pi}\right)-f(0)\cdot f(0).$$

Obținem $I=\dfrac{1}{2}\cdot f^2\left(\dfrac{2}{\pi}\right)=\dfrac{8}{\pi^4}$.

5.6.11 Să se calculeze $\int_0^1 f\,\mathrm{d}g$, dacă $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$ şi

$$g(x)=\begin{cases} x, & \text{pentru } x\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right];\\ 1-x, & \text{pentru } x\in\left(\dfrac{1}{2},1\right].\end{cases}$$

Indicație de rezolvare:

Funcția g este cu variație mărginită, deoarece $g=g_1+g_2$, unde:

$$g_1(x)=\begin{cases} x, & \text{pentru } x\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right]\\ 0, & \text{pentru } x\in\left(\dfrac{1}{2},1\right]\end{cases} \quad\text{şi}\quad g_2(x)=\begin{cases} 0, & \text{pentru } x\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right];\\ 1-x, & \text{pentru } x\in\left(\dfrac{1}{2},1\right].\end{cases}.$$

Funcțiile g_1, g_2 sunt monotone şi mărginite pe domeniul de definiție.

Funcția f este derivabilă şi cu derivata continuă pe domeniul de definiție, de unde rezultă că există integrala Riemann-Stieltjes $\int_0^1 g\,\mathrm{d}f$ şi avem:

$$\int_0^1 f\,\mathrm{d}g = f(1)\cdot g(1) - f(0)\cdot g(0) - \int_0^1 g\,\mathrm{d}f = -\int_0^1 g(x)\cdot f'(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}.$$

5.6.12 Să se calculeze următoarele integrale Riemann-Stieltjes:

a) $\int_{-1}^{1} \sin x\,\mathrm{d}[x]$;

b) $\int_0^4 x\,\mathrm{d}g(x),\ g(x) = \begin{cases} 1, & \text{pentru } x \in [0,1]; \\ -x, & \text{pentru } x \in (1,2]; \\ 3+x^2, & \text{pentru } x \in (2,4); \\ 4, & \text{pentru } x = 4; \end{cases}$

Indicație de rezolvare:

a) funcția $f:[-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ este continuă pe domeniul ei de definiție, iar funcția $g:[-1,1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = [x] = \begin{cases} -1, & \text{pentru } x \in [-1,0) \\ 0, & \text{pentru } x \in [0,1) \\ 1, & \text{pentru } x = 1 \end{cases}$ este monoton crescătoare, deci funcția f este integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu g pe $[-1,1]$ şi, utilizând teorema 5.5.7, obținem că $\int_{-1}^{1} \sin x\,\mathrm{d}[x] = \sin 1$;

b) $$\int_0^4 x\,\mathrm{d}g(x) = \int_0^1 x\,\mathrm{d}(1) + \int_1^2 x\,\mathrm{d}(-x) + \int_2^4 x\,\mathrm{d}\left(3+x^2\right) +$$
$$+ f(1)\cdot\left[g(1+0) - g(1-0)\right] + f(2)\cdot\left[g(2+0) - g(2-0)\right] +$$
$$+ f(4)\cdot\left[g(4) - g(4-0)\right] = -\frac{49}{6};$$

5.6.13 Fie $f(x) = \int_x^{x+1} \sin t^2\,\mathrm{d}t$. Să se arate că $|f(x)| < \frac{1}{2x}$, $x > 0$.

Indicație de rezolvare:

Se face schimbarea de variabilă $t^2 = u,\ t = \sqrt{u}$, deci $\mathrm{d}t = \frac{1}{2\sqrt{u}}\mathrm{d}u$.

Obținem $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{x+1}} \frac{\sin u}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$.

Considerând $\alpha(u) = \frac{1}{\sqrt{u}}$ și $\beta(u) = \sin u$, avem că α este o funcție monotonă, iar β este o funcție continuă și cu variație mărginită pe domeniul de definiție. În aceste condiții se poate aplica a doua formulă de medie. Rezultă:

$$\left|f(x)\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\sin\xi - \sin\sqrt{x}\right) + \frac{1}{\sqrt{x+1}}\left(\sin\sqrt{x+1} - \sin\xi\right)\right| <$$

$$< \frac{1}{2}\left(\frac{\left|\sin\xi - \sin\sqrt{x}\right|}{\sqrt{x}} + \frac{\left|\sin\sqrt{x+1} - \sin\xi\right|}{\sqrt{x+1}}\right) <$$

$$< \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(\left|\sin\xi - \sin\sqrt{x}\right| + \left|\sin\sqrt{x+1} - \sin\xi\right|\right),$$

unde $\sqrt{x} < \xi < \sqrt{x+1}$.

Obținem astfel:

$$\left|f(x)\right| < \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\left|\sin\frac{\xi - \sqrt{x}}{2} \cdot \cos\frac{\xi + \sqrt{x}}{2}\right| + \left|\sin\frac{\sqrt{x+1} - \xi}{2} \cdot \cos\frac{\sqrt{x+1} + \xi}{2}\right|\right) <$$

$$< \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\left|\sin\frac{\xi - \sqrt{x}}{2}\right| + \left|\sin\frac{\sqrt{x+1} - \xi}{2}\right|\right) <$$

$$< \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\left|\frac{\xi - \sqrt{x}}{2}\right| + \left|\frac{\sqrt{x+1} - \xi}{2}\right|\right) < \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2} + \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right) = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} < \frac{1}{2x}.$$

Test de autoevaluare

1 Să se calculeze:

a) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt[3]{1+x^5}}$;

b) $\int x^5 \cdot \sqrt[3]{\left(1+x^3\right)^2}\mathrm{d}x$;

c) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{-x^2+5x-6}}$.

2 Să se calculeze aria mărginită de graficul funcției $f(x)=\frac{\cos x}{1+\cos x}$, axa o$x$ şi dreptele de ecuații $x=0$, $x=\frac{3\pi}{4}$.

3 Să se calculeze coordonatele centrului de greutate ale suprafeței mărginită de $f(x)=\sin x$, axa ox şi dreptele de ecuații $x=0,\ x=\pi$.

4 Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotirea curbei $y=\sin x,\ x\in[0,\pi]$ în jurul axei oy.

5 Să se arate că următoarea funcție este cu variație mărginită şi să se calculeze variația sa totală: $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}2x^3, & \text{pentru } x\in[-1,0);\\ 0, & \text{pentru } x=0;\\ x^3\cdot\left[\frac{1}{x}\right], & \text{pentru } x\in(0,1].\end{cases}$

6 Să se arate că următoarele funcții sunt continue, mărginite, dar nu sunt cu variație mărginită:

a) $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x^2\cdot\cos\frac{\pi}{2x^2}, & \text{pentru } x\in(0,1];\\ 0, & \text{pentru } x=0;\end{cases}$

b) $f:\left[0,\frac{2}{\pi}\right]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\ln x}\cdot\cos\frac{1}{x}, & \text{pentru } x\in\left(0,\frac{2}{\pi}\right];\\ 0, & \text{pentru } x=0.\end{cases}$

7 Să se calculeze prin două metode integrala $I=\int_0^{\pi/2} x^2 \mathrm{d}f(x)$, unde

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & \text{pentru } x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right];\\ 1, & \text{pentru } x=0.\end{cases}$$

8 Să se calculeze următoarele integrale Riemann-Stieltjes:

a) $\displaystyle\int_1^3 \frac{\mathrm{d}g(x)}{\sqrt{x}+1}$, $g(x)=\begin{cases}2+x, & \text{pentru } x\in[1,2);\\ 3, & \text{pentru } x=2;\\ \sqrt{x}, & \text{pentru } x\in(2,3];\end{cases}$

b) $\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}(\sin x)$, $f(x)=\begin{cases}2, & \text{pentru } x=0;\\ \cos^2 x, & \text{pentru } x\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right];\\ x, & \text{pentru } x\in\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right];\\ \dfrac{\pi^2}{4}-x^2, & \text{pentru } x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right].\end{cases}$

MODULUL 5

INTEGRALE IMPROPRII. INTEGRALE CU PARAMETRII

În acest modul sunt prezentate pe parcursul a două lecții principalele noțiuni teoretice referitoare la integralele improprii şi cu parametrii.

După parcurgerea celor două lecții din cuprinsul modulului studenții vor dobândi cunoştințele teoretice şi îşi vor forma deprinderile practice cu ajutorul cărora vor putea recunoaşte, înțelege şi rezolva probleme referitoare la:

- noțiunea de convergență a unei integrale improprii şi tipurile de integrale improprii;
- criterii de convergență pentru integrale improprii (din funcții pozitive, din funcții oarecare);
- legătura integralelor improprii cu serile numerice;
- integrale cu parametrii şi integrale improprii cu parametrii;
- noțiunile de convergență simplă şi uniformă pentru integrale improprii cu parametrii;
- criterii de convergență simplă şi uniformă pentru integrale improprii cu parametrii;
- propietățiile de continuitate, derivabilitate, integrabilitate şi existență a primitivelor pentru o funcție definită printr-o integrală cu parametru;
- integralele euleriene de prima şi a doua speță: definiții, proprietăți, formule de calcul, relații de legătură, aplicații.

Materialul trebuie parcurs în ordinea sa firească prezentată în cuprinsul modulului, inclusiv în porțiunea referitoare la aplicații. Metoda de studiu va fi cea specifică disciplinelor matematice, cu utilizarea expresă a adnotărilor făcute cu creionul pe tot parcursul textului. Pentru fiecare tip de exercițiu se recomandă identificarea algoritmului şi descompunerea acestuia în etape succesive. Se recomandă studierea soluțiilor problemelor rezolvate şi rezolvarea completă a problemelor propuse în testele de autoevaluare şi în tema de control propusă.

Timpul mediu necesar parcurgerii şi însuşirii noțiunilor teoretice, algoritmilor de rezolvare a problemelor, formării deprinderilor practice de rezolvare şi dobândirii competențelor enumerate anterior este de aproximativ 6-8 ore de studiu pentru fiecare lecție, într-un ritm de 2-3 ore pe zi.

LECȚIA 1

INTEGRALE IMPROPRII

6.1 Definiții şi proprietăți ale integralelor improprii

Este cunoscută noțiunea de integrală definită $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, unde $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este o funcție mărginită pe $[a,b]$.

Există probleme care conduc la extinderea noțiunii de integrală definită.

Fie, astfel, $f:[0,+\infty)\to(0,1]$, $f(x)=\mathrm{e}^{-x}$. Aria porțiunii din plan cuprinsă între dreptele $x=0,\ x=u,\ y=0$ şi graficul funcției *f* este dată de relația $\int_0^u \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=1-\mathrm{e}^{-u}$. Rezultă, în mod natural, aria cuprinsă între dreptele $x=0,\ y=0$ şi graficul funcției *f*, de forma:

$$\lim_{u\to\infty}\int_0^u \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=\lim_{u\to\infty}\left(1-\mathrm{e}^{-u}\right)=1.$$

Dacă $f:[1,+\infty)\to(0,1]$, $f(x)=\frac{1}{x}$, atunci aria cuprinsă între dreptele $x=0,\ x=u,\ y=0$ şi graficul funcției f va fi $\int_1^u \frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln u$. În acest caz, nu se mai poate da un sens natural noțiunii de arie a porțiunii plane cuprinsă între dreptele $x=0,\ y=0$ şi graficul lui *f*, deoarece

$$\lim_{u\to\infty}\int_1^u \frac{1}{x}\mathrm{d}x=\lim_{u\to\infty}\ln u=+\infty.$$

Astfel de probleme conduc la studiul existenței unor limite de forma $\lim_{u\to\infty}\int_a^u f(x)\mathrm{d}x,\ \lim_{u\to-\infty}\int_u^a f(x)\mathrm{d}x,\ \lim_{u\to\infty}\int_{-u}^u f(x)\mathrm{d}x$.

Definiția 6.1.1. Fie $f:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ integrabilă pe orice interval compact $[a,u]\subset[a,+\infty)$ şi fie $F(u)=\int_a^u f(x)\mathrm{d}x$. Funcția *f* este ***integrabilă*** pe $[a,+\infty)$, dacă există $\lim_{u\to\infty} F(u)$ finită.

Notație. $\lim_{u\to\infty} F(u)=\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$.

Observația 6.1.2. Dacă funcția *f* este integrabilă pe $[a,+\infty)$, spunem că ***integrala*** $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ este ***convergentă***. În caz contrar, integrala este ***divergentă***.

Observația 6.1.3. În mod asemănător se definesc integralele

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\mathrm{d}x=\lim_{u\to-\infty}\int_u^a f(x)\mathrm{d}x$$

şi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\lim_{u\to-\infty}\int_u^a f(x)\mathrm{d}x+\lim_{u\to\infty}\int_a^u f(x)\mathrm{d}x.$$

Definiția 6.1.4. Fie $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ integrabilă pe orice interval compact $[a,u]\subset[a,b)$ şi fie $F(u)=\int_a^u f(x)\mathrm{d}x$. Funcția f este ***integrabilă*** pe $[a,b)$, dacă există $\lim_{u\nearrow b} F(u)$ şi este finită.

Notație. $\lim_{u\nearrow b} F(u)=\int_a^{b-0} f(x)\mathrm{d}x$.

Observația 6.1.5. Dacă f este integrabilă pe $[a,b)$, spunem că ***integrala*** $\int_a^{b-0} f(x)\mathrm{d}x$ este ***convergentă***. În caz contrar, ea este ***divergentă***.

Observația 6.1.6. În mod asemănător se definesc integralele $\int_{a+0}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{u \searrow a} \int_{u}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$ și $\int_{a+0}^{b-0} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Observație. Integralele

$$\int_{a}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x,\ \int_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x,\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x,\ \int_{a}^{b-0} f(x)\,\mathrm{d}x,\ \int_{a+0}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

se numesc ***integrale improprii***.

Exemplu:

Fie $f:[0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}, & \text{pentru } x \in [0,1); \\ 0, & \text{pentru } x = 1. \end{cases}$

$$\int_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{u \nearrow 1} \int_{0}^{u} \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{u \nearrow 1} 2\left(1 - \sqrt{1-u}\right) = 2.$$

Rezultă că funcția f este integrabilă pe $[0,1)$, dar nu este integrabilă pe $[0,1]$, deoarece este nemărginită pe $[0,1]$.

Definiția 6.1.7. Fie $f:[a,b) \to \mathbb{R}$ (b finit sau infinit), integrabilă pe orice interval compact $[a,u] \subset [a,b)$ și fie $F(u) = \int_{a}^{u} f(x)\,\mathrm{d}x$. Funcția f este ***integrabilă*** pe $[a,b)$, dacă există $\lim_{u \nearrow b} F(u)$ și este finită.

Notație. $\lim_{u \nearrow b} F(u) = \int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Teorema 6.1.8. Fie $f:[a,b) \to \mathbb{R}$ (b finit sau infinit), integrabilă pe orice interval compact $[a,u] \subset [a,b)$. Dacă $a < c < b$, atunci integralele $\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$ și $\int_{c}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$ au aceeași natură.

Teorema 6.1.9. Fie $f,g:[a,b)\to\mathbb{R}$ (b finit sau infinit), integrabile pe orice interval compact $[a,u]\subset[a,b)$. Dacă integralele $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ şi $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ sunt convergente, atunci şi integrala $\int_a^b(\alpha\cdot f(x)+\beta\cdot g(x))\mathrm{d}x$, α, $\beta\in\mathbb{R}$ este convergentă.

Criteriul lui Cauchy-Bolzano

Fie $F:[a,b)\to\mathbb{R}$ (b finit sau infinit). $\lim\limits_{u\nearrow b}F(u)$ există şi este finită dacă şi numai dacă pentru $(\forall)\ \varepsilon>0$, $(\exists)\ b_0(\varepsilon)\in(a,b)$, astfel încât pentru orice u', u'' cu $b_0(\varepsilon)<u'<u''<b$ să avem $|F(u')-F(u'')|<\varepsilon$.

Criteriul lui Cauchy

Fie $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ (b finit sau infinit), integrabilă pe orice interval compact $[a,u]\subset[a,b)$. Integrala $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ este convergentă dacă şi numai dacă pentru $(\forall)\ \varepsilon>0$, $(\exists)\ b_0(\varepsilon)\in(a,b)$, astfel încât pentru orice u', u'' cu $b_0(\varepsilon)<u'<u''<b$ să avem $\left|\int_{u'}^{u''}f(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$.

Definiția 6.1.10. Fie $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ (b finit sau infinit), integrabilă pe orice interval compact $[a,u]\subset[a,b)$. Integrala $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ se numeşte ***absolut convergentă***, dacă $\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x$ este convergentă.

Teorema 6.1.11. Fie $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ (b finit sau infinit), integrabilă pe orice interval compact $[a,u]\subset[a,b)$. Dacă integrala $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ este absolut convergentă, atunci ea este convergentă.

Definiția 6.1.12. O integrală improprie se numeşte ***semiconvergentă***, dacă ea este convergentă, dar nu este absolut convergentă.

Definiția 6.1.13. **i)** Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continuă. Integrala improprie $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ se numeşte ***convergentă în sensul valorii principale Cauchy***, dacă şi numai dacă există $\lim\limits_{a\to\infty}\int\limits_{-a}^{+a} f(x)\,\mathrm{d}x\in\mathbb{R}$ şi $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{def}}{=} \lim\limits_{a\to\infty}\int\limits_{-a}^{+a} f(x)\,\mathrm{d}x$;

ii) Fie $f:[a,c)\cup(c,b]\to\mathbb{R}$, unde $a<c<b$ continuă. Integrala improprie $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ se numeşte ***convergentă în sensul valorii principale Cauchy***, dacă şi numai dacă există

$$\lim_{u\searrow 0}\left[\int\limits_a^{c-u} f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_{c+u}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x\right]\in\mathbb{R}$$

şi avem

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{def}}{=} \lim_{u\searrow 0}\left[\int\limits_a^{c-u} f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_{c+u}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x\right].$$

6.2 Integrale improprii din funcții pozitive

Teorema 6.2.1 (Criteriul de comparație I). Fie $f,g:[a,b)\to\mathbb{R}$ (b finit sau infinit), integrabile pe orice interval compact $[a,u]\subset[a,b)$.

Dacă se verifică:

i) $0\le f(x)\le g(x)$, $(\forall)\ x\in[a,b)$;

ii) $\int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă,

atunci $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă.

Corolar 6.2.2. Fie $f,g:[a,b)\to\mathbb{R}$ (b finit sau infinit), integrabile pe orice interval compact $[a,u]\subset[a,b)$.

Dacă se verifică:

i) $0\le f(x)\le g(x)$, $(\forall)\ x\in[a,b)$;

ii) $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ este divergentă,

atunci $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ este divergentă.

Teorema 6.2.3 (Criteriul de comparație II). Fie $f,g:[a,b)\to\mathbb{R}$ (b finit sau infinit), integrabile pe orice interval compact $[a,u]\subset[a,b)$.

Dacă se verifică:

i) $f(x)>0,\ g(x)>0,\ (\forall)\ x\in[a,b)$;

ii) $\lim\limits_{x\to b}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A>0,\ A\neq\infty$,

atunci integralele $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ şi $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ au aceeaşi natură.

Observația 6.2.4. Un rol important în utilizarea criteriilor de comparație I şi II îl au integralele $I_1=\int_a^b\dfrac{\mathrm{d}x}{(b-x)^{\alpha}}$ şi $I_2=\int_a^{\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha}},\ a>0$.

Natura integralei I_1:

Pentru $\alpha\neq1$, $I_1=\int_a^b\dfrac{\mathrm{d}x}{(b-x)^{\alpha}}=\lim\limits_{u\to b}\int_a^u\dfrac{\mathrm{d}x}{(b-x)^{\alpha}}=-\lim\limits_{u\to b}\dfrac{(b-x)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Bigg|_a^u=$

$$=\begin{cases}\dfrac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}, & \text{pentru } \alpha<1;\\ +\infty, & \text{pentru } \alpha>1.\end{cases}$$

Pentru $\alpha=1$, $I_1=\int_a^b\dfrac{\mathrm{d}x}{b-x}=\lim\limits_{u\to b}\int_a^u\dfrac{\mathrm{d}x}{b-x}=-\lim\limits_{u\to b}\ln(b-x)\Big|_a^u=+\infty$.

Rezultă că I_1 este convergentă pentru $\alpha<1$ şi divergentă pentru $\alpha\geq1$.

Natura integralei I_2:

Pentru $\alpha \neq 1$, $I_2 = \int_a^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = \lim_{u\to\infty} \int_a^u \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} \lim_{u\to\infty} x^{1-\alpha}\Big|_a^u =$

$$= \begin{cases} \frac{a^{1-\alpha}}{1-\alpha}, & \text{pentru } \alpha > 1; \\ \infty, & \text{pentru } \alpha < 1. \end{cases}$$

Pentru $\alpha = 1$, $I_2 = \int_a^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim_{u\to\infty} \int_a^u \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim_{u\to\infty} (\ln u - \ln a) = \infty$.

Rezultă că integrala I_2 este convergentă pentru $\alpha > 1$ şi divergentă pentru $\alpha \leq 1$.

Teorema 6.2.5. Fie $f : [a,+\infty) \to \mathbb{R}_+$, $a > 0$, integrabilă pe orice interval compact $[a,u] \subset [a,+\infty)$. Dacă $\lim_{x\to\infty} x^\alpha \cdot f(x) = A$, atunci:

i) dacă $\alpha > 1$ şi $0 \leq A < \infty$, integrala $\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ este convergentă;

ii) dacă $\alpha \leq 1$ şi $0 < A \leq \infty$, integrala $\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ este divergentă.

Exemplu:

Fie $I = \int_1^\infty \frac{\ln x}{\sqrt{1+x^3}}\mathrm{d}x$. Se consideră funcţia $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{1+x^3}}$ şi se calculează $\lim_{x\to\infty} x^\alpha \cdot f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^\alpha \cdot \ln x}{x^{3/2} \cdot \sqrt{\frac{1}{x^3}+1}} = 0$ pentru un $\alpha = \frac{3}{2} - \varepsilon > 1$, deci integrala este convergentă.

Teorema 6.2.6. Fie $f : [a,b) \to \mathbb{R}_+$, integrabilă pe orice interval compact $[a,u] \subset [a,b)$. Dacă $\lim_{x \nearrow b} (b-x)^\alpha \cdot f(x) = A$, atunci:

i) dacă $\alpha < 1$ şi $0 \leq A < \infty$, integrala $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ este convergentă;

ii) dacă $\alpha \geq 1$ şi $0 < A \leq \infty$, integrala $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ este divergentă.

Exemplu:

Fie $I = \int_0^1 \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$. Funcția $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ este nemărginită în $x = 1$.

$\lim_{x \nearrow 1}(1-x)^{\alpha} \cdot f(x) = \lim_{x \nearrow 1}(1-x)^{\alpha} \cdot \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, pentru $\alpha = \frac{1}{2} < 1$, deci integrala este convergentă.

6.3 Integrale improprii din funcții oarecare

Criteriul lui Dirichlet

Fie $f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$. Dacă:

i) funcția *f* este continuă şi admite o primitivă *F* mărginită pe $[a, +\infty)$;

ii) funcția *g* are derivata continuă pe $[a, +\infty)$;

iii) funcția *g* este monoton descrescătoare pe $[a, +\infty)$;

iv) $\lim_{x \to \infty} g(x) = 0$,

atunci $\int_a^{\infty} f(x) \cdot g(x)\mathrm{d}x$ este convergentă.

Exemple:

1) Integrala $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x^{\alpha}}\mathrm{d}x$, $\alpha > 0$ este convergentă, deoarece verifică cerințele Criteriului lui Dirichlet, pentru $f(x) = \sin x$ şi $g(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$.

2) Integralele lui Fresnel $\int_0^{\infty} \sin x^2 \mathrm{d}x$, $\int_0^{\infty} \cos x^2 \mathrm{d}x$ sunt convergente.

Demonstrație. $\int_0^{\infty} \sin x^2 \mathrm{d}x = \int_0^1 \sin x^2 \mathrm{d}x + \int_1^{\infty} \sin x^2 \mathrm{d}x$.

Integrala $\int_0^1 \sin x^2 \mathrm{d}x$ este pe un interval compact. Pentru studiul convergenței integralei improprii $\int_1^\infty \sin x^2 \mathrm{d}x$, se face schimbarea de variabilă $x^2 = t$ și avem $\int_1^\infty \sin x^2 \mathrm{d}x = \lim_{u\to\infty} \int_1^u \sin x^2 \mathrm{d}x = \lim_{u\to\infty} \int_1^{u^2} \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \cdot \int_1^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}} \mathrm{d}t$, iar integrala $\int_1^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}} \mathrm{d}t$ verifică cerințele Criteriului lui Dirichlet, deci este convergentă.

Similar se demonstrează convergența integralei $\int_0^\infty \cos x^2 \mathrm{d}x$.

6.4 Integrale improprii şi serii numerice

Fie $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ (b finit sau infinit), integrabilă pe orice interval compact $[a,u] \subset [a,b)$ şi fie $a = b_0 < b_1 < \ldots < b_n < \ldots < b$ un şir cu proprietatea că $\lim_{n\to\infty} b_n = b$.

Se defineşte seria numerică $\sum_{n=0}^{\infty} \int_{b_n}^{b_{n+1}} f(x)\mathrm{d}x$.

Teorema 6.4.1. Dacă integrala $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ este convergentă, atunci şi seria numerică $\sum_{n=0}^{\infty} \int_{b_n}^{b_{n+1}} f(x)\mathrm{d}x$ este convergentă şi are loc egalitatea:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{b_n}^{b_{n+1}} f(x)\mathrm{d}x.$$

Observații:

1) Pentru $f : [a,b) \to \mathbb{R}_+$, atunci este adevărată şi reciproca teoremei 6.4.1.

2) Dacă $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ nu păstrează semn constant pe $[a,b)$, atunci reciproca teoremei 6.4.1 nu se verifică întotdeauna.

Exemplu:

Seria $\sum_{k=0}^{\infty}\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi}\sin x\,\mathrm{d}x=-\sum_{k=0}^{\infty}\cos x\Big|_{2k\pi}^{2(k+1)\pi}=0$, deci este convergentă.

În acelaşi timp, integrala $\int_0^{\infty}\sin x\,\mathrm{d}x=\lim_{u\to\infty}\int_0^{u}\sin x\,\mathrm{d}x=\lim_{u\to\infty}(1-\cos u)$, care nu există.

Criteriul integral al lui Cauchy

Fie funcţia $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}_+$, descrescătoare. Seria numerică $\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$ este convergentă, dacă şi numai dacă $\int_1^{\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă.

Exemplu

Seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ are aceeaşi natură cu integrala $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^{\alpha}}\mathrm{d}x$.

6.5 Aplicaţii

6.5.1 Să se studieze convergenţa şi, în caz afirmativ, să se calculeze următoarele integrale improprii:

a) $\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x,\ \lambda>0$; **b)** $\int_0^{\infty}x\cdot\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$; **c)** $\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$;

d) $\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}x}{1+x^2}\mathrm{d}x$; **e)** $\int_0^{\infty}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$; **f)** $\int_0^{\infty}\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$;

g) $\int_0^{\infty}\sin x\,\mathrm{d}x$; **h)** $\int_1^{\infty}x\cdot\cos x^2\mathrm{d}x$; **i)** $\int_1^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}\mathrm{d}x$;

j) $\int\limits_1^{\infty}\frac{\ln x}{x^{1+\alpha}}\mathrm{d}x,\ \alpha>0$; **k)** $\int\limits_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\alpha x}\cdot\cos(\beta x)\mathrm{d}x,\ \alpha>0$;

l) $\int\limits_0^{\infty}\mathrm{e}^{-ax}\cdot\sin x\,\mathrm{d}x,\ a>0$; **m)** $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{1+x^4}\mathrm{d}x$;

n) $\int\limits_{-1}^{0}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$; **o)** $\int\limits_0^{1/2}\frac{\mathrm{d}x}{x\cdot\ln^2 x}$.

Indicație de rezolvare:

a) $I=\lim\limits_{u\to\infty}\int\limits_0^u\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x=\lim\limits_{u\to\infty}-\frac{1}{\lambda}\cdot\mathrm{e}^{-\lambda x}\Big|_0^u=\frac{1}{\lambda}$, deci integrala este convergentă;

b) $\frac{1}{2}$;

c) $\frac{\pi}{2}$;

d) $\frac{\pi^2}{8}$;

e) $I=\lim\limits_{u\to\infty}\int\limits_0^u\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\lim\limits_{u\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\ln\left(1+x^2\right)\Big|_0^u=\infty$, deci integrala este divergentă;

f) divergentă;
g) divergentă;
h) divergentă;

i) $I=\lim\limits_{u\to\infty}\int\limits_1^u\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}\mathrm{d}x=-\lim\limits_{u\to\infty}\int\limits_1^u\left(\frac{1}{x}\right)'\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=$

$=\lim\limits_{u\to\infty}\cos\left(\frac{1}{x}\right)\Big|_1^u=1-\cos 1$;

j) $I=\lim\limits_{u\to\infty}\int\limits_1^u \frac{\ln x}{x^{1+\alpha}}\mathrm{d}x=\lim\limits_{u\to\infty}\int\limits_1^u x^{-1-\alpha}\cdot\ln x\,\mathrm{d}x=\lim\limits_{u\to\infty}\int\limits_1^u \frac{\left(x^{-\alpha}\right)'}{(-\alpha)}\cdot\ln x\,\mathrm{d}x=$

$=\lim\limits_{u\to\infty}\left[\frac{x^{-\alpha}}{-\alpha}\Big|_1^u-\int\limits_1^u\frac{x^{-\alpha}}{-\alpha}\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x\right]=\lim\limits_{u\to\infty}\left[-\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{u^{\alpha}}-1\right)-\frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{1}{u^{\alpha}}-1\right)\right]=$

$=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha^2};$

k) $\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2};$

l) $I=\lim\limits_{u\to\infty}\int\limits_0^u \mathrm{e}^{-ax}\cdot\sin x\,\mathrm{d}x=\lim\limits_{u\to\infty}\int\limits_0^u \mathrm{e}^{-ax}\cdot(-\cos x)'\,\mathrm{d}x=$

$=\lim\limits_{u\to\infty}\left(-\mathrm{e}^{-ax}\cdot\cos x\Big|_0^u+\int\limits_0^u\left(\mathrm{e}^{-ax}\right)'\cdot\cos x\,\mathrm{d}x\right)=$

$=\lim\limits_{u\to\infty}\left(-\mathrm{e}^{-ax}\cdot\cos x\Big|_0^u-a\cdot\int\limits_0^u\mathrm{e}^{-ax}\cdot\cos x\,\mathrm{d}x\right)=$

$=\lim\limits_{u\to\infty}\left(1-\mathrm{e}^{-au}\cdot\cos u-a\cdot\mathrm{e}^{-au}\cdot\sin u-a^2\cdot I\right);$

rezultă astfel că $I=\frac{1}{1+a^2};$

m) $I=\lim\limits_{u\to\infty}\int\limits_{-u}^u\frac{x}{1+x^4}\mathrm{d}x=\lim\limits_{u\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\int\limits_{-u}^u\frac{\left(x^2\right)'\mathrm{d}x}{1+x^4}=\lim\limits_{u\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\operatorname{arctg}x^2\Big|_{-u}^u=0;$

n) $I=\lim\limits_{u\searrow -1}\int\limits_u^0\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\lim\limits_{u\searrow -1}\arcsin x\Big|_u^0=\lim\limits_{u\searrow -1}(-\arcsin u)=\frac{\pi}{2};$

o) $I=\frac{1}{\ln 2}.$

6.5.2 Să se studieze convergența integralelor:

a) $\int\limits_0^\infty\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}$; **b)** $\int\limits_1^\infty\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^2}}$; **c)** $\int\limits_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{1-x^4}}$; **d)** $\int\limits_0^{100}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x}+2\sqrt[4]{x}+\sqrt[5]{x}}$;

e) $\int\limits_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$, $a<b$; **f)** $\int\limits_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$; **g)** $\int\limits_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\mathrm{d}x$;

h) $\int\limits_0^{\infty} x^{a-1}\cdot \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$; **i)** $\int\limits_1^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x}\mathrm{d}x$, $a \geq 0$.

Indicație de rezolvare:

a) se consideră $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$; $f(x)=\frac{1}{1+x^4}$; se calculează $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\alpha}\cdot f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^{\alpha}}{1+x^4}=1$ pentru $\alpha=4>1$, deci conform teoremei 6.2.5 integrala este convergentă;

b) convergentă;

c) se consideră funcția $f:[0,1)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{1-x^4}}$ şi se calculează $\lim\limits_{x\nearrow 1}(1-x)^{\alpha}\cdot f(x)=\lim\limits_{x\nearrow 1}(1-x)^{\alpha}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{(1-x^2)\cdot(1+x^2)}}=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ pentru $\alpha=\frac{1}{3}<1$, deci integrala este convergentă, conform teoremei 6.2.6;

d) se consideră funcția $f:(0,100]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}+2\sqrt[4]{x}+\sqrt[5]{x}}$ şi se calculează $\lim\limits_{x\searrow 0} x^{\alpha}\cdot f(x)=1$ pentru $\alpha=\frac{1}{5}<1$, deci integrala este convergentă;

e) convergentă;

f) convergentă;

g) se consideră funcția $f:\left(0,\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(\sin x)$ şi se calculează

$$\lim_{x\searrow 0} x^{\alpha}\cdot f(x)=\lim_{x\searrow 0} x^{\alpha}\cdot\ln(\sin x)=\lim_{x\searrow 0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^{\alpha}\cdot(\sin x)^{\alpha}\cdot\ln(\sin x)=$$

$$=\lim_{x\searrow 0}(\sin x)^{\alpha}\cdot\ln(\sin x)=\lim_{x\searrow 0}\frac{\ln(\sin x)}{(\sin x)^{-\alpha}}=0,$$

pentru $\alpha<1$, deci integrala este convergentă;

h) $\int\limits_0^{\infty} x^{a-1}\cdot\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^{1} x^{a-1}\cdot\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x+\int\limits_1^{\infty} x^{a-1}\cdot\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=I_1+I_2$;

pentru integrala I_1, aceasta este improprie pentru $a<1$, se consideră funcția $f:(0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^{a-1}\cdot \mathrm{e}^{-x}$ și se calculează $\lim\limits_{x\searrow 0} x^{\alpha}\cdot f(x)=$ $=\lim\limits_{x\searrow 0} x^{a+\alpha-1}\cdot \mathrm{e}^{-x}<+\infty$, pentru $a+\alpha-1\geq 0$; deci $1>\alpha\geq 1-a$, de unde obținem că integrala I_1 este convergentă pentru $a>0$; pentru integrala I_2 se consideră funcția $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^{a-1}\cdot \mathrm{e}^{-x}$ și se calculează $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\alpha}\cdot f(x)=0$ pentru $a+\alpha-1>0$, deci pentru $\alpha>1$ și obținem astfel convergența integralei $I=I_1+I_2$;

i) se consideră funcția $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^{a-1}}{1+x}$, $a\geq 0$ și se calculează $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\alpha}\cdot\dfrac{x^{a-1}}{1+x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^{\alpha+a-1}}{1+x}<+\infty$ pentru $\alpha+a-1\leq 1$, deci pentru $1<\alpha\leq 2-a$. Obținem astfel convergența integralei pentru $a<1$ și divergența ei pentru $a\geq 1$.

6.5.3 Fie $f,g:[a,+\infty)\to\mathbb{R}_+$, astfel încât $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=L$, unde $0<L<\infty$.

i) Să se arate că există $c\in[a,+\infty)$, astfel încât:

$$\frac{1}{2}\cdot L\cdot g(x)\leq f(x)\leq\frac{3}{2}\cdot L\cdot g(x),\ (\forall)\ x\in[c,+\infty).$$

ii) Dacă f și g sunt integrabile pe orice interval compact $[a,\lambda]$, $(\lambda\geq a)$ să se arate că integrala $\int_a^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ este convergentă dacă și numai dacă $\int_a^{\infty} g(x)\mathrm{d}x$ este convergentă și $\int_a^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ este divergentă dacă și numai dacă $\int_a^{\infty} g(x)\mathrm{d}x$ este divergentă.

Indicație de rezolvare:

i) Fie $V=\left[\dfrac{L}{2},\dfrac{3L}{2}\right]$. Deoarece $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=L$, există $c_V\in(a,+\infty)$, astfel încât $\dfrac{f(x)}{g(x)}\in V$, $(\forall)\ x\in[c_V,+\infty)$, de unde rezultă:

$$\frac{1}{2}\cdot L\cdot g(x)\leq f(x)\leq\frac{3}{2}\cdot L\cdot g(x),\ (\forall)\ x\in[c,+\infty),\text{ unde } c=c_V.$$

ii) Din inegalitatea de la punctul i) rezultă că cele două integrale improprii au aceeaşi natură.

6.5.4 Să se studieze convergenţa următoarelor integrale:

a) $\int_2^{\infty}\frac{x^2\mathrm{d}x}{x^7-3}$; **b)** $\int_4^{\infty}\frac{x^3+4}{x^5-3x^2-5}\mathrm{d}x$; **c)** $\int_2^{\infty}\frac{\sqrt[5]{x^3+2x}}{\sqrt[3]{2x^5-4x-1}}\mathrm{d}x$;

d) $\int_2^{\infty}\frac{(x-1)\mathrm{d}x}{x^2+x}$; **e)** $\int_4^{\infty}\sqrt{\frac{x^3+2}{x^6-4x-1}}\mathrm{d}x$.

Indicaţie de rezolvare:

a) se utilizează rezultatul de la exerciţiul anterior, considerând $f(x)=\frac{x^2}{x^7-3}$ şi $g(x)=\frac{1}{x^5}$; avem că $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=1$, deci integralele $\int_2^{\infty}f(x)\mathrm{d}x$ şi $\int_2^{\infty}g(x)\mathrm{d}x$ au aceeaşi natură; cum integrala $\int_2^{\infty}g(x)\mathrm{d}x=\int_2^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^5}$ este convergentă, rezultă şi convergenţa integralei $\int_2^{\infty}\frac{x^2\mathrm{d}x}{x^7-3}$;

b) convergentă;

c) convergentă;

d) se consideră funcţiile $f(x)=\frac{x-1}{x^2+x}$ şi $g(x)=\frac{1}{x}$; pentru acestea avem $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=1$, deci integralele au aceeaşi natură; cum integrala $\int_2^{\infty}g(x)\mathrm{d}x=\int_2^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x}$ este divergentă, rezultă şi divergenţa integralei $\int_2^{\infty}\frac{(x-1)\mathrm{d}x}{x^2+x}$;

e) convergentă.

6.5.5 Fie $f,\ g:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ continue şi astfel încât $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\alpha$ şi $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=\beta$, unde $\alpha\neq0\neq\beta$. Atunci $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\int_a^x f(x)\mathrm{d}x}{\int_a^x g(x)\mathrm{d}x}=\frac{\alpha}{\beta}$.

Indicație de rezolvare:

Fie $0<\varepsilon\le\frac{1}{2}\cdot\min\{|\alpha|,|\beta|\}$. Atunci $(\exists)\ a<b_\varepsilon<\infty$, astfel încât pentru $(\forall)\ x\in[b_\varepsilon,\infty)$ să avem $\alpha-\frac{|\alpha|}{2}<f(x)<\alpha+\frac{|\alpha|}{2}$. Dacă $\alpha>0$, rezultă că $f(x)>\frac{\alpha}{2}$, $(\forall)x\ge b_\varepsilon$. Fie $u\in(b_\varepsilon,\infty)$.

Avem $F(u)=\int_a^{b_\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x+\int_{b_\varepsilon}^{u} f(x)\mathrm{d}x=\int_a^{b_\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x+\frac{\alpha}{2}\cdot(u-b_\varepsilon)\underset{u\to\infty}{\to}\infty$.

Dacă $\alpha<0$, atunci $f(x)<\frac{\alpha}{2}<0,\ (\forall)\ x\ge b_\varepsilon$. Fie $u\in(b_\varepsilon,\infty)$.

Avem $F(u)<\int_a^{b_\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x+\frac{\alpha}{2}\cdot(u-b_\varepsilon)\underset{u\to\infty}{\to}-\infty$.

În ambele cazuri rezultă că $\int_a^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ este nemărginită.

În mod similar se demonstrează că şi $\int_a^{\infty} g(x)\mathrm{d}x$ este nemărginită.

Cum funcțiile f şi g sunt continue, funcțiile $F(x)=\int_a^{x} f(t)\mathrm{d}t$ şi $G(x)=\int_a^{x} g(t)\mathrm{d}t$ verifică $F'(x)=f(x)$ şi $G'(x)=g(x)$.

Avem $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{F(x)}{G(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{F'(x)}{G'(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\alpha}{\beta}$.

6.5.6 Să se arate că dacă funcția $f:[a,+\infty)\to\infty$ este uniform continuă şi dacă integrala $\int_a^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ este convergentă, atunci $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$.

Indicație de rezolvare:

Se demonstrează prin reducere la absurd. Presupunem că $(\exists)\ \varepsilon_0>0$, astfel încât pentru $(\forall)\ M>0,\ (\exists)\ x_M>M$, astfel încât $|f(x_M)|>\varepsilon_0$.

Pentru $M = n$, $n \in \mathbb{N}$, obținem un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, astfel încât $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ şi $|f(x_n)| > \varepsilon_0$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$. Rezultă că $f(x_n) > \varepsilon_0$, pentru o infinitate de termeni, sau $f(x_n) < -\varepsilon_0$, pentru o infinitate de termeni.

Presupunem că $f(x_n) > \varepsilon_0$. Funcția f este uniform continuă, prin ipoteză. Atunci, pentru $\varepsilon_0 > 0$ de mai sus, există $\delta(\varepsilon_0) > 0$, astfel încât pentru orice $x', x'' \in [a,+\infty)$, cu $|x' - x''| < \delta(\varepsilon_0)$, să avem $|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon_0}{2}$.

Fie $x' = x_n$ şi $x \in (x_n - \delta(\varepsilon_0), x_n + \delta(\varepsilon_0))$. Pentru acestea avem $|f(x_n) - f(x)| < \frac{\varepsilon_0}{2}$. Rezultă că $f(x) > f(x_n) - \frac{\varepsilon_0}{2} > \frac{\varepsilon_0}{2}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$, şi orice $x \in (x_n - \delta(\varepsilon_0), x_n + \delta(\varepsilon_0))$.

Prin urmare, $\int\limits_{x_n-\delta(\varepsilon_0)}^{x_n+\delta(\varepsilon_0)} f(x)\mathrm{d}x > \frac{\varepsilon_0}{2} \cdot \int\limits_{x_n-\delta(\varepsilon_0)}^{x_n+\delta(\varepsilon_0)} \mathrm{d}x = \varepsilon_0 \cdot \delta(\varepsilon_0)$, inegalitate care contrazice ipoteza de convergență a integralei $\int\limits_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$.

6.5.7 Fie $f : [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ integrabilă pe orice interval compact din $[a,+\infty)$. Dacă există $\lim_{x\to\infty} f(x)$ şi este finită şi dacă integrala $\int\limits_a^\infty |f(x)|\mathrm{d}x$ este convergentă, atunci şi integrala $\int\limits_a^\infty f^2(x)\mathrm{d}x$ este convergentă.

Indicație de rezolvare:

Fie $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$. Avem că $\lim_{x\to\infty} \frac{f^2(x)}{|f(x)|} = \lim_{x\to\infty} |f(x)| = |L|$ şi, conform teoremei 6.2.3 (criteriul de comparație II), integralele $\int\limits_a^\infty |f(x)|\mathrm{d}x$ şi $\int\limits_a^\infty f^2(x)\mathrm{d}x$ au aceeaşi natură.

6.5.8 Fie $f, g : [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ integrabile pe orice interval compact din $[a,+\infty)$. Dacă există şi sunt finite limitele $\lim_{x\to\infty} f(x)$ şi $\lim_{x\to\infty} g(x)$ şi dacă

integralele $\int_a^{\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ şi $\int_a^{\infty}|g(x)|\mathrm{d}x$ sunt convergente, atunci şi integrala $\int_a^{\infty} f(x)\cdot g(x)\mathrm{d}x$ este convergentă.

Indicație de rezolvare:

Din aplicația precedentă rezultă că integralele $\int_a^{\infty} f^2(x)\mathrm{d}x$ şi $\int_a^{\infty} g^2(x)\mathrm{d}x$ sunt convergente.

În acelaşi timp, $|f(x)\cdot g(x)|\le\frac{1}{2}\left(f^2(x)+g^2(x)\right)$, de unde rezultă că integrala $\int_a^{\infty} f(x)\cdot g(x)\mathrm{d}x$ este absolut convergentă.

6.5.9 Să se arate că din convergența integralei $\int_a^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ nu rezultă că $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$.

Indicație de rezolvare:

Integrala $\int_0^{\infty}\sin x^2\mathrm{d}x$ este convergentă, dar $\lim_{x\to\infty}\sin x^2$ nu există.

6.5.10 Să se arate că integralele $\int_0^1\left[\frac{1}{x}\right]\mathrm{d}x$ şi $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x+[x]}$ sunt divergente.

Indicație de rezolvare:

Pentru $\int_0^1\left[\frac{1}{x}\right]\mathrm{d}x$ avem $0\le\frac{1}{x}-1\le\left[\frac{1}{x}\right]$, $(\forall)\ x\in(0,1]$ şi $\int_0^1\left(\frac{1}{x}-1\right)\mathrm{d}x=\infty$, deci integrala este divergentă şi, utilizând consecința criteriului I de comparație, rezultă şi divergența integralei $\int_0^1\left[\frac{1}{x}\right]\mathrm{d}x$.

Similar, se demonstrează şi divergenţa integralei $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x+[x]}$.

6.5.11 Să se calculeze integrala $L_n = \int_0^{\pi} \frac{1-\cos nx}{1-\cos x}\mathrm{d}x,\ n\in \mathbb{N}^*$.

Indicaţie de rezolvare:

$$\frac{L_{n-1}+L_{n+1}}{2} = \int_0^{\pi} \frac{2-\cos(n-1)x-\cos(n+1)x}{2(1-\cos x)}\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \frac{1-\cos nx\cdot\cos x}{1-\cos x}\mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{(1-\cos nx)+\cos nx\cdot(1-\cos x)}{1-\cos x}\mathrm{d}x = L_n + \int_0^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x = L_n.$$

Obţinem astfel că $\frac{L_{n-1}+L_{n+1}}{2} = L_n,\ (\forall)\ n\in\mathbb{N}^*$, deci termenii şirului $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sunt în progresie aritmetică.

În acelaşi timp, $L_1 = \int_0^{\pi}\mathrm{d}x = \pi$ şi $L_0 = \int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1-\cos x} = 0$, deci $L_1 - L_0 = \pi$.

Rezultă că $L_n = n\pi,\ (\forall)\ n\in\mathbb{N}^*$.

6.5.12 Să se calculeze integrala $\int_0^{\infty}\min\left\{x^2,\frac{1}{x^2}\right\}\mathrm{d}x$.

Indicaţie de rezolvare:

Fie funcţia $f(x) = \min\left\{x^2,\frac{1}{x^2}\right\},\ x\in\mathbb{R}_+^*$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{pentru } x\in(0,1]; \\ \frac{1}{x^2}, & \text{pentru } x\in(1,+\infty). \end{cases}$$

Rezultă $\int_0^{\infty}\min\left\{x^2,\frac{1}{x^2}\right\}\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2\mathrm{d}x + \int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}+1 = \frac{4}{3}$.

6.5.13 Să se calculeze integrala $\int\limits_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{2\cdot[x]+3\cdot[x]^2+[x]^3}$.

Indicație de rezolvare:

Fie funcția $f(x)=\frac{1}{2[x]+3[x]^2+[x]^3}$, $(\forall)\ x\in \mathbb{R}_+^*$.

Pentru $n\le x<n+1$, avem $[x]=n$, iar

$$\int\limits_n^{n+1} f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}x}{2n+3n^2+n^3}=\frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$$

$$\int\limits_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int\limits_1^{n} f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_k^{k+1} f(x)\mathrm{d}x=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{4}.$$

6.5.14 Să se calculeze integrala $I=\int\limits_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{|x^2-1|}}$.

Indicație de rezolvare:

$I=I_1+I_2$, unde $I_1=\int\limits_0^{1}\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{1-x^2}}$ și $I_2=\int\limits_1^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}$.

Se demonstrează convergența ambelor integrale, de unde rezultă și convergența integralei *I*.

Pentru integrala I_1 se face schimbarea de variabilă $x=\frac{1}{y}$, deci $\mathrm{d}x=\left(-\frac{1}{y^2}\right)\mathrm{d}y$ și obținem $I_1=I_2$, deci $I=2\cdot I_2$.

$$I_2=\int\limits_1^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}=\int\limits_1^{\infty}(x+1)^{-1}\cdot\left(x^2-1\right)^{-1/2}\mathrm{d}x=$$

$$=\int\limits_1^{\infty}(x+1)^{-3/2}\cdot(x-1)^{-1/2}\mathrm{d}x=\int\limits_2^{\infty}(x+1)^{-3/2}\cdot\left[(x+1)-2\right]^{-1/2}\mathrm{d}(x+1).$$

Se consideră $m=-3/2,\ n=1,\ p=-1/2\notin\mathbb{Z}$.

$\dfrac{m+1}{n}=-1/2\notin\mathbb{Z}$, dar $p+\dfrac{m+1}{n}\in\mathbb{Z}$ şi se face substituția $\dfrac{(x+1)-2}{x+1}=t^2$.

Rezultă $x=\dfrac{1+t^2}{1-t^2}$ şi, în urma efectuării calculelor, obținem $I_2=1$, deci $I=2$.

6.5.15 Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ integrabilă pe $[0,b]$, $(\forall)\ b>0$.
Atunci:

i) dacă f este funcție impară, avem $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=0$;

ii) dacă f este funcție pară, avem $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=2\cdot\int\limits_{0}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Indicație de rezolvare:

i) $$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{a\to\infty}\left(\int\limits_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x\right)=$$

$$=\lim_{a\to\infty}\left(-\int\limits_{a}^{0} f(-x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x\right)=\lim_{a\to\infty}\left(\int\limits_{0}^{a} f(-x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x\right)=0,$$

ținând cont că $f(-x)=-f(x)$;

ii) în mod similar cu punctul i).

6.5.16 Să se calculeze:

a) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sin x\,\mathrm{d}x$; **b)** $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x$.

Indicație de rezolvare:

a) Funcția $\sin(\cdot)$ este o funcție impară, deci $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sin x\,\mathrm{d}x=0$;

b) 0.

6.5.17 Să se arate că:

i) $I_{2n}=\int\limits_0^{\pi/2}\sin^{2n}x\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\pi/2}\cos^{2n}x\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}u}{\left(1+u^2\right)^{n+1}}=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2};$

ii) $I_{2n+1}=\int\limits_0^{\pi/2}\sin^{2n+1}x\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\pi/2}\cos^{2n+1}x\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}u}{\left(1+u^2\right)^{n+3/2}}=$

$$=\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\cdot\frac{1}{(2n+1)};$$

iii) $\lim\limits_{n\to\infty}I_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}I_{2n+1}=0;$

iv) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\cdot\frac{1}{2n+1}=\frac{\pi}{2}$ (formula lui Wallis).

Indicație de rezolvare:

i) $I_{2n}=\int\limits_0^{\pi/2}\sin^{2n}x\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\pi/2}\cos^{2n}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\pi/2}\cos^{2n}x\,\mathrm{d}x$; în integrala $\int\limits_0^{\pi/2}\cos^{2n}x\,\mathrm{d}x$ se face schimbarea de variabilă $\mathrm{tg}\,x=u$, de unde rezultă $\cos^2x=\frac{1}{u^2+1}$, $\cos^{2n}x=\frac{1}{\left(u^2+1\right)^n}$ şi $\mathrm{d}x=\frac{1}{u^2+1}\mathrm{d}u$, astfel obținem $I_{2n}=\int\limits_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}u}{\left(u^2+1\right)^{n+1}}$;

$$I_{2n}=\int\limits_0^{\pi/2}\sin^{2n}x\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\pi/2}\sin^{2n-1}x\cdot\sin x\,\mathrm{d}x=-\int\limits_0^{\pi/2}\sin^{2n-1}x\cdot(\cos x)'\,\mathrm{d}x=$$

$$=-\sin^{2n-1}x\cdot\cos x\Big|_0^{\pi/2}+(2n-1)\cdot\int\limits_0^{\pi/2}\sin^{2n-2}x\cdot\cos^2x\,\mathrm{d}x=$$

$$=(2n-1)\int\limits_0^{\pi/2}\sin^{2n-2}x\left(1-\sin^2x\right)\mathrm{d}x=(2n-1)\cdot I_{2n-2}-(2n-1)\cdot I_{2n};$$

obținem astfel $I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} \cdot I_{2n-2} = ... = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot I_0$ și cum $I_0 = \frac{\pi}{2}$, rezultă că $I_{2n} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$;

ii) se demonstrează similar cu punctul i);

iii) deoarece $0 < I_{2n+1} < I_{2n} < \frac{\pi}{2\sqrt{2n+1}}$, rezultă

$$\lim_{n\to\infty} I_{2n} = \lim_{n\to\infty} I_{2n+1} = 0$$

iv) din inegalitățile $\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \cdot \frac{\pi}{2} \le \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \le \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$ rezultă

$$\frac{2n+1}{2n+2} \cdot \frac{\pi}{2} \le \frac{1}{2n+1} \cdot \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \le \frac{\pi}{2},$$

iar prin trecere la limită obținem formula lui Wallis.

6.5.18 Să se determine aria regiunii plane care se află în primul cadran, este mărginită de axa ox şi:

a) axa oy şi curba de ecuație $y\left(x^2+4\right) = 8$;

b) dreapta $x = 3$ şi curba de ecuație $yx^2 = 1 + 4y$.

Indicație de rezolvare:

a) $A = \int_0^\infty |f(x)| \mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{8\mathrm{d}x}{x^2+4} = 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot \operatorname{arctg}\frac{x}{2}\Big|_0^\infty = 4 \cdot \frac{\pi}{2} = 2\pi$;

b) $A = \frac{1}{4} \cdot \ln 5$.

6.5.19 Să se calculeze intensitatea integrală a curentului $g = \int_0^\infty y\,\mathrm{d}t$ şi intensitatea integrală a pătratului curentului $S = \int_0^\infty y^2 \mathrm{d}t$ pentru:

i) procesul neperiodic simplu $y = y_0 \cdot \mathrm{e}^{-kt}$, $k > 0$;

ii) procesul simplu oscilant $y = y_0 \cdot \mathrm{e}^{-kt} \cdot \sin \omega t$, $k > 0$.

Indicație de rezolvare:

i) $g = y_0 \cdot \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-kt}\,\mathrm{d}t = y_0 \cdot \lim_{u\to\infty} \int_0^{u} \mathrm{e}^{-kt}\,\mathrm{d}t = y_0 \cdot \left(-\frac{1}{k}\right) \cdot \lim_{u\to\infty} \mathrm{e}^{-kt}\Big|_0^u = \frac{y_0}{k}$;

similar, obținem $S = y_0^2 \cdot \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-2kt}\,\mathrm{d}t = \frac{y_0^2}{2k}$;

ii) $g = \frac{y_0 \cdot \omega}{\omega^2 + k^2}$, $S = \frac{y_0^2 \cdot \omega^2}{4k\left(\omega^2 + k^2\right)}$.

6.5.20 Să se calculeze $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\mathrm{d}x}{x^4 - 2x^2\cos 2\alpha + 1}$, $\alpha \neq k\pi$ şi apoi să se deducă valorile integralelor:

i) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\mathrm{d}x}{x^4+1}$; **ii)** $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\mathrm{d}x}{x^4-x^2+1}$; **iii)** $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\mathrm{d}x}{x^4+x^2+1}$.

Indicație de rezolvare:

$$\frac{x^2}{x^4 - 2x^2\cos 2\alpha + 1} = \frac{Ax+B}{x^2 - 2x\cos\alpha + 1} + \frac{Cx+D}{x^2 + 2x\cos\alpha + 1},$$

de unde obținem $B = D = 0$, $A = \frac{1}{4\cos\alpha}$, $C = -\frac{1}{4\cos\alpha}$.

Astfel:

$$\int \frac{x^2}{x^4 - 2x^2\cos 2\alpha + 1}\mathrm{d}x = \frac{1}{4\cos\alpha} \cdot \left[\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2 - 2x\cos\alpha + 1} - \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2 + 2x\cos\alpha + 1}\right].$$

În acelaşi timp $x^2 - 2x\cos\alpha + 1 = (x - \cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha$ şi cu schimbarea de variabilă $x = \cos\alpha + t\sin\alpha$, obținem:

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2 - 2x\cos\alpha + 1} = \mathrm{ctg}\,\alpha \cdot \left(\mathrm{arctg}\frac{x - \cos\alpha}{\sin\alpha}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(x^2 - 2x\cos\alpha + 1\right).$$

Similar obținem:

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2 + 2x\cos\alpha + 1} = -\mathrm{ctg}\,\alpha \cdot \left(\mathrm{arctg}\frac{x + \cos\alpha}{\sin\alpha}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(x^2 + 2x\cos\alpha + 1\right).$$

Deci, $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\mathrm{d}x}{x^4 - 2x^2\cos 2\alpha + 1} = \frac{\pi}{2\sin\alpha}$.

LECȚIA 2

INTEGRALE CU PARAMETRI

7.1 Integrale cu parametri pe intervale compacte

Fie funcția $f:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ integrabilă în raport cu *x* pe $[a,b]$ pentru orice parametru $t\in[c,d]$.

Integrala $J(t)=\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x$ este funcție de parametrul $t\in[c,d]$ şi se numeşte ***integrală cu parametru***.

Teorema 7.1.1. Dacă funcția $f:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ este continuă pe domeniul de definiție, atunci integrala $J(t)=\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x$ este o funcție continuă pe $[c,d]$.

Teorema 7.1.2. Dacă funcția $f:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ este continuă pe domeniul de definiție şi funcțiile $u,v:[c,d]\to[a,b]$ sunt continue pe domeniul lor de definiție, atunci integrala $J(t)=\int_{u(t)}^{v(t)} f(x,t)\,\mathrm{d}x$ este o funcție continuă pe $[c,d]$.

Teorema 7.1.3. Dacă funcțiile $f,\ \frac{\partial f}{\partial t}:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ sunt continue pe domeniul de definiție, atunci integrala $J(t)=\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x$ este o funcție derivabilă în raport cu parametrul $t\in[c,d]$ şi se verifică:

$$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x=\int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,\mathrm{d}x.$$

Teorema 7.1.4. Dacă funcțiile $f,\ \dfrac{\partial f}{\partial t}:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ sunt continue pe domeniul de definiție şi funcțiile $u,v:[c,d]\to[a,b]$ sunt derivabile pe $[c,d]$, atunci integrala $J(t)=\displaystyle\int_{u(t)}^{v(t)} f(x,t)\,\mathrm{d}x$ este o funcție derivabilă în raport cu parametrul $t\in[c,d]$ şi se verifică:

$$J'(t)=\int_{u(t)}^{v(t)}\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,\mathrm{d}x+v'(t)\cdot f\big(v(t),t\big)-u'(t)\cdot f\big(u(t),t\big).$$

Teorema 7.1.5. *Fie funcția* $f:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ *continuă pe domeniul de definiție. Atunci* $\displaystyle\int_a^b\left[\int_c^d f(x,t)\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x=\int_c^d\left[\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}t$.

7.2 Integrale improprii cu parametri

Fie funcția $f:[a,b)\times[c,d]\to\mathbb{R}$ (b finit sau infinit), astfel încât integrala $J(t)=\displaystyle\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x$ este convergentă pentru $(\forall)\ t\in[c,d]$.

Definiția 7.2.1. **i)** Integrala $J(t)=\displaystyle\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x$, unde $f:[a,b)\times[c,d]\to\mathbb{R}$, ***converge uniform*** în raport cu $t\in[c,d]$, dacă pentru $(\forall)\ \varepsilon>0$, $(\exists)\ b_0(\varepsilon)\in(a,b)$, astfel încât pentru $(\forall)\ u\in\big(b_0(\varepsilon),b\big)$, să avem $\left|\displaystyle\int_a^u f(x,t)\,\mathrm{d}x-J(t)\right|<\varepsilon,\ (\forall)\ t\in[c,d]$.

ii) Integrala $J(t)=\displaystyle\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x$, unde $f:[a,b)\times[c,d]\to\mathbb{R}$ ***converge uniform*** în raport cu $t\in[c,d]$, dacă pentru

$(\forall)\ \varepsilon > 0,\ (\exists)\ b_0(\varepsilon) \in (a,b)$, astfel încât pentru $(\forall)\ x', x'' \in (b_0(\varepsilon), b)$, să avem $\left|\int_{x'}^{x''} f(x,t)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon,\ (\forall)\ t \in [c,d]$.

Exemplu:

În continuare, este dat un exemplu de integrală convergentă, dar care nu converge uniform.

Fie integrala $J(t) = \int_0^\infty t \cdot \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}x$. Aceasta converge pentru orice $t \in [0,1]$, dar nu converge uniform în raport cu $t \in [0,1]$.

Pentru $t = 0$ avem $J(0) = 0$.

Pentru $t \in (0,1]$ se face schimbarea de variabilă $xt = y$ şi obţinem $J(t) = \lim_{u\to\infty} \int_0^u t \cdot \mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}x = \lim_{u\to\infty} \int_0^{tu} \mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y = 1$.

Inegalitatea $\left|\int_0^u f(x,t)\,\mathrm{d}x - J(t)\right| < \varepsilon,\ (\forall)\ t \in [0,1]$ din definiţia convergenţei uniforme devine $\left|\int_0^u t \cdot \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}x - 1\right| < \varepsilon$, de unde rezultă $\mathrm{e}^{-tu} < \varepsilon$, deci $u > \dfrac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{t}$, $0 < \varepsilon < 1$. Prin urmare, inegalitatea care dă convergenţa uniformă are loc pentru $u > b_0(\varepsilon, t) = -\dfrac{\ln\varepsilon}{t}$, deci integrala considerată nu converge uniform în raport cu parametrul $t \in [0,1]$.

Observaţie. Fie $a = b_0 < b_1 < \ldots < b_k < \ldots < b$ un şir crescător cu $\lim_{k\to\infty} b_k = b$. Cu ajutorul şirului considerat putem construi seria de funcţii:

$$\int_{b_0}^{b_1} f(x,t)\,\mathrm{d}x + \int_{b_1}^{b_2} f(x,t)\,\mathrm{d}x + \ldots + = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t),\ \text{ unde }\ u_k(t) = \int_{b_k}^{b_{k+1}} f(x,t)\,\mathrm{d}x.$$

Teorema 7.2.2. Dacă integrala $J(t)=\int_a^b f(x,t)\mathrm{d}x$, unde $f:[a,b)\times[c,d]\to\mathbb{R}$ este uniform convergentă în raport cu $t\in[c,d]$, atunci seria de funcții $\sum_{k=0}^{\infty}u_k(t)$, $u_k(t)=\int_{b_k}^{b_{k+1}} f(x,t)\mathrm{d}x$ este uniform convergentă pe $[c,d]$ şi are loc egalitatea $\int_a^b f(x,t)\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{\infty}\int_{b_k}^{b_{k+1}} f(x,t)\mathrm{d}x$.

Teorema 7.2.3. Fie funcția $f:[a,b)\times[c,d]\to\mathbb{R}$ continuă. Dacă integrala $J(t)=\int_a^b f(x,t)\mathrm{d}x$ este uniform convergentă în raport cu $t\in[c,d]$, atunci funcția $J(t)$ este continuă pe intervalul $[c,d]$.

Teorema 7.2.4. Fie funcția $f:[a,b)\times[c,d]\to\mathbb{R}$ continuă. Dacă:

i) $\frac{\partial f}{\partial t}$ există şi este continuă pe $[a,b)\times[c,d]$;

ii) integrala $J(t)=\int_a^b f(x,t)\mathrm{d}x$ este convergentă;

iii) integrala $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\mathrm{d}x$ este uniform convergentă în raport cu $t\in[c,d]$,

atunci funcția J este derivabilă pe $[c,d]$ şi are loc egalitatea: $J'(t)=\int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\mathrm{d}x$, iar $J':[c,d]\to\mathbb{R}$ este o funcție continuă pe domeniul său de definiție.

Teorema 7.2.5. Fie $f:[a,b)\times[c,d]\to\mathbb{R}$ cu proprietățile:

i) f este continuă;

ii) integrala $\int_a^b f(x,t)\mathrm{d}x$ este uniform convergentă în raport cu parametrul $t\in[c,d]$.

Atunci:

a) integrala $\int_a^b \left[\int_c^d f(x,t)\,\mathrm{d}t \right] \mathrm{d}x$ este convergentă;

b) $\int_a^b \left[\int_c^d f(x,t)\,\mathrm{d}t \right] \mathrm{d}x = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x \right] \mathrm{d}t$.

Teorema 7.2.6. Fie funcția $f:[a,b)\times[c,d)\to\mathbb{R}$ cu proprietățile:

i) f este continuă;

ii) integrala $\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x$ este uniform convergentă în raport cu parametrul $t\in[c,v]$, $(\forall)\ v\in[c,d)$;

iii) integrala $\int_c^d f(x,t)\,\mathrm{d}t$ este uniform convergentă în raport cu parametrul $x\in[a,u]$, $(\forall)\ u\in[u,b)$;

iv) integrala $\int_c^d \left[\int_a^b \left|f(x,t)\right| \mathrm{d}x \right] \mathrm{d}t$ sau $\int_a^b \left[\int_c^d \left|f(x,t)\right| \mathrm{d}t \right] \mathrm{d}x$ este convergentă.

Atunci $\int_a^b \left[\int_c^d \left|f(x,t)\right| \mathrm{d}t \right] \mathrm{d}x = \int_c^d \left[\int_a^b \left|f(x,t)\right| \mathrm{d}x \right] \mathrm{d}t$.

Teorema 7.2.7 (***Criteriul lui Weierstrass***). Fie $f:[a,b)\times[c,d]\to\mathbb{R}$. Dacă:

i) $\int_a^u f(x,t)\,\mathrm{d}x$ există pentru $(\forall)\ u\in[a,b)$ și $(\forall)\ t\in[c,d]$;

ii) există o funcție $g:[a,b)\to\mathbb{R}_+$, astfel încât $\left|f(x,t)\right|\le g(x)$, $(\forall)\ x\in[a,b)$, $(\forall)\ t\in[c,d]$;

iii) integrala $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă,

atunci integrala $\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x$ este uniform convergentă în raport cu $t\in[c,d]$.

Teorema 7.2.8 (Criteriul lui Abel). Fie funcțiile $f, g : [a,b) \times [c,d] \to \mathbb{R}$ cu proprietățile:

i) f este continuă;

ii) $g(\cdot, t) : [a,b) \to \mathbb{R}$ este monotonă pentru orice $t \in [c,d]$;

iii) există $M > 0$, astfel încât

$$\left| \int_a^u f(x,t) \mathrm{d}x \right| \leq M, \ (\forall)\ u \in [a,b), \ (\forall)\ t \in [c,d];$$

iv) există $\lim_{x \to b} g(x,t) = 0$ şi este uniformă în raport cu $t \in [c,d]$.

Atunci integrala $\int_a^b f(x,t) \cdot g(x,t) \mathrm{d}x$ este uniform convergentă în raport cu parametrul $t \in [c,d]$.

Teorema 7.2.9 (Criteriul lui Leibniz)

Fie funcțiile $f,\ g : [a,b) \times [c,d] \to \mathbb{R}$ cu proprietățile:

i) f este continuă;

ii) $g(\cdot, t) : [a,b) \to \mathbb{R}$ este monotonă pentru orice $t \in [c,d]$;

iii) integrala $\int_a^b f(x,t) \mathrm{d}x$ este uniform convergentă în raport cu parametrul $t \in [c,d]$;

iv) există $M > 0$, astfel încât $|g(x,t)| \leq M, \ (\forall)\ x \in [a,b), \ (\forall)\ t \in [c,d]$.

Atunci integrala $\int_a^b f(x,t) \cdot g(x,t) \mathrm{d}x$ este uniform convergentă în raport cu parametrul $t \in [c,d]$.

Observație. Criteriile lui Abel şi Leibniz se pot extinde prin înlocuirea intervalului $[c,d]$ cu o mulțime arbitrară $A \subset \mathbb{R}$.

7.3 Integrale Euleriene

1) Integrala lui Euler de speța a doua

Aceasta este definită pentru $p > 0$, prin $\Gamma(p) = \int\limits_0^\infty x^{p-1} \cdot \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

Pentru a studia convergența integralei $\Gamma(p)$, se consideră descompunerea de forma $\Gamma(p) = \int\limits_0^1 x^{p-1} \cdot \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x + \int\limits_1^\infty x^{p-1} \cdot \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

Pentru $\int\limits_0^1 x^{p-1} \cdot \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$, se consideră

$$\lim_{x \to 0} x^{\alpha} \cdot x^{p-1} \cdot \mathrm{e}^{-x} = \lim_{x \to 0} x^{\alpha+p-1} \cdot \mathrm{e}^{-x} < +\infty \text{, pentru } 1 > \alpha \geq 1 - p,$$

deci pentru $p > 0$. Rezultă convergența integralei $\int\limits_0^1 x^{p-1} \cdot \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

Pentru integrala $\int\limits_1^\infty x^{p-1} \cdot \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$, se va ține seama de inegalitatea $\mathrm{e}^{x} > \frac{x^n}{n!}$, sau $\mathrm{e}^{-x} < \frac{n!}{x^n}$, de unde rezultă că $x^{p-1} \cdot \mathrm{e}^{-x} < \frac{n!}{x^{n+1-p}}$.

Pentru $n > p$, folosind primul criteriu de comparație avem:

$$\int\limits_1^\infty x^{p-1} \cdot \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x < \int\limits_1^\infty \frac{n!}{x^{n+1-p}}\,\mathrm{d}x \text{ și cum } \int\limits_1^\infty \frac{n!}{x^{n+1-p}}\,\mathrm{d}x = n! \cdot \int\limits_1^\infty \frac{1}{x^{n+1-p}}\,\mathrm{d}x$$

este convergentă pentru $n > p$, rezultă și convergența integralei $\int\limits_1^\infty x^{p-1} \cdot \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

Am obținut astfel convergența integralei $\Gamma(p)$.

Integrând prin părți,

$$\int\limits_0^\infty x^{p-1} \cdot \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{p} \cdot \int\limits_0^\infty \left(x^{p}\right)' \cdot \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{p} \cdot x^{p} \cdot \mathrm{e}^{-x}\Big|_0^\infty + \frac{1}{p} \cdot \int\limits_0^\infty x^{p} \cdot \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{p} \cdot \Gamma(p+1),$$

obținem proprietatea $\Gamma(p+1) = p \cdot \Gamma(p)$.

Aceasta conduce la

$$\Gamma(p+n) = (p+n-1) \cdot (p+n-2) \cdot \ldots \cdot (p+1) \cdot p \cdot \Gamma(p).$$

Pentru $p=1$, avem $\Gamma(1) = \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x = 1$, de unde rezultă că $\Gamma(n+1) = n!$.

2) Integrala lui Euler de prima speță

Aceasta este definită prin $B(p,q) = \int\limits_0^1 x^{p-1} \cdot (1-x)^{q-1} \mathrm{d}x,\ p,\ q > 0$.

Pentru $p \geq 1,\ q \geq 1$, funcția $f(x) = x^{p-1} \cdot (1-x)^{q-1}$ este continuă pe compactul $[0,1]$, deci integrala are sens.

Pentru $p < 1$ sau $q < 1$, se studiază convergența integralei $B(p,q)$.

Dacă $p < 1$, integrala $\int\limits_0^1 \frac{(1-x)^{q-1}}{x^{1-p}} \mathrm{d}x$ este convergentă pentru $1-p < 1$, deci pentru $p > 0$.

Dacă $q < 1$, integrala $\int\limits_0^1 \frac{x^{p-1}}{(1-x)^{1-q}} \mathrm{d}x$ este convergentă pentru $1-q < 1$, deci pentru $q > 0$.

Am obținut astfel convergența integralei $B(p,q)$.

Observații:

1) $B(p,q) = B(q,p),\ (\forall)\ p,\ q > 0$.

2) Între cele două integrale ale lui Euler se verifică relația $B(p,q) = \frac{\Gamma(p) \cdot \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},\ (\forall)\ p,\ q > 0$.

3) $\Gamma(p) \cdot \Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi},\ (\forall)\ p \in (0,1)$.

Exemple:

1) Fie integrala $I=\int_0^{\infty} e^{-x^p}\,dx,\ p>0$. Făcând schimbarea de variabilă $x^p=y$, rezultă $dx=\frac{1}{p}\cdot y^{\frac{1}{p}-1}\,dy$, de unde rezultă:

$$I=\frac{1}{p}\cdot\int_0^{\infty} e^{-y}\cdot y^{\frac{1}{p}-1}\,dy=\frac{1}{p}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{p}\right).$$

2) Pentru $p=\frac{1}{2}$ avem $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{\infty} x^{-\frac{1}{2}}\cdot e^{-x}\,dx$. Făcând schimbarea de variabilă $x=t^2$, obținem $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=2\cdot\int_0^{\infty} e^{-t^2}\,dt$.

Rezultă $\int_0^{\infty} e^{-t^2}\,dt=\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

În acelaşi timp, $B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)}=\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2$.

Astfel, $\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2=\int_0^1 x^{-1/2}\cdot(1-x)^{-1/2}\,dx=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$. Pentru calculul integralei $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$ se face schimbarea de variabilă $x=\sin^2 t$, deci $dx=2\sin t\cdot\cos t\,dt$.

Rezultă că $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}=\int_0^{\pi/2}\frac{2\sin t\cdot\cos t\,dt}{\sqrt{\sin^2 t\cdot\cos^2 t}}=\pi$ şi deci $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$.

Am obținut $\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ numită **integrala Euler-Poisson**.

7.4 Aplicații

7.4.1 Să se calculeze integralele:

a) $J(\alpha)=\int\limits_0^{\pi/2}\ln\left(\alpha^2-\sin^2 x\right)\mathrm{d}x,\ \alpha>1;$

b) $J(\alpha,\beta)=\int\limits_0^{\pi/2}\ln\left(\alpha^2\cdot\sin^2 x+\beta^2\cdot\cos^2 x\right)\mathrm{d}x.$

Indicație de rezolvare:

a) fie funcția

$$f:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\times(1,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x,\alpha)=\ln\left(\alpha^2-\sin^2 x\right)\text{ continuă}$$

şi există $\frac{\partial f}{\partial\alpha}(x,\alpha)=\frac{2\alpha}{\alpha^2-\sin^2 x}$ continuă pentru $\alpha>1$; rezultă că există $J'(\alpha)=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\partial f}{\partial\alpha}(x,\alpha)\mathrm{d}x=2\alpha\cdot\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{\alpha^2-\sin^2 x}$ şi se face schimbarea de variabilă $\operatorname{tg}x=t,\ x=\operatorname{arctg}t,\ \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$; obținem

$$J'(\alpha)=2\alpha\cdot\int\limits_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}t}{\alpha^2+t^2\left(\alpha^2-1\right)}=\frac{2}{\sqrt{\alpha^2-1}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{t\sqrt{\alpha^2-1}}{\alpha}\Bigg|_0^{\infty}=\frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2-1}}$$

şi rezultă că $J(\alpha)=\pi\cdot\ln\left(\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}\right)+C$, unde C este constanta de integrare;

$$C=J(\alpha)-\pi\cdot\ln\left(\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}\right)=\int\limits_0^{\pi/2}\ln\left(\alpha^2-\sin^2 x\right)\mathrm{d}x-\pi\cdot\ln\left(\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}\right)=$$

$$=\int\limits_0^{\pi/2}\ln\alpha^2\cdot\left(1-\frac{\sin^2 x}{\alpha^2}\right)\mathrm{d}x-\pi\cdot\ln\left(\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}\right)=$$

$$=2\cdot\int\limits_0^{\pi/2}\ln\alpha\,\mathrm{d}x+\int\limits_0^{\pi/2}\ln\left(1-\frac{\sin^2 x}{\alpha^2}\right)\mathrm{d}x-\pi\cdot\ln\left(\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}\right)=$$

$$=\pi\cdot\ln\alpha-\pi\cdot\ln\left(\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}\right),$$

deoarece $\int_0^{\pi/2} \ln\left(1-\frac{\sin^2 x}{\alpha^2}\right)dx = 0$, rezultă din $\ln\left(1-\frac{1}{\alpha^2}\right) \le \ln\left(1-\frac{\sin^2 x}{\alpha^2}\right) \le \ln 1$;

obținem $C = \pi\cdot\ln\alpha - \pi\cdot\ln\left(\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}\right)$ şi deci

$$J(\alpha) = \pi\cdot\ln\left(\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}\right) + \pi\cdot\ln\alpha - \pi\cdot\ln\left(\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}\right) = \pi\cdot\ln\alpha;$$

b) fie funcția $f(x,\alpha,\beta) = \ln\left(\alpha^2\cdot\sin^2 x + \beta^2\cdot\cos^2 x\right)$ continuă pe domeniul său de definiție.

$$\frac{\partial f}{\partial\alpha}(x,\alpha,\beta) = \frac{2\alpha\cdot\sin^2 x}{\alpha^2\cdot\sin^2 x+\beta^2\cdot\cos^2 x} \text{ şi } \frac{\partial f}{\partial\beta}(x,\alpha,\beta) = \frac{2\beta\cdot\cos^2 x}{\alpha^2\cdot\sin^2 x+\beta^2\cdot\cos^2 x}$$

sunt continue. Rezultă că există

$$\frac{\partial J}{\partial\alpha} = \int_0^{\pi/2} \frac{\partial f}{\partial\alpha}(x,\alpha,\beta)dx = \int_0^{\pi/2} \frac{2\alpha\cdot\sin^2 x}{\alpha^2\cdot\sin^2 x+\beta^2\cdot\cos^2 x}dx,$$

pentru calculul căreia se face schimbarea de variabilă $\mathrm{tg}\,x = t$. Obținem astfel $\frac{\partial J}{\partial\alpha} = \frac{\pi}{\alpha+\beta}$. Similar obținem că $\frac{\partial J}{\partial\beta} = \frac{\pi}{\alpha+\beta}$.

Astfel avem $J(\alpha,\beta) = \pi\cdot\ln(\alpha+\beta) + \varphi(\beta)$. Derivând ultima relație obținută în raport cu variabila β, rezultă $\frac{\partial J}{\partial\beta} = \frac{\pi}{\alpha+\beta} + \varphi'(\beta) = \frac{\pi}{\alpha+\beta}$, deci $\varphi'(\beta) = 0$, iar $\varphi(\beta) = C$. Pentru determinarea constantei C se consideră $J(1,1) = \pi\cdot\ln 2 + C = 0$, de unde $C = -\pi\cdot\ln 2$.

Rezultă astfel $J(\alpha,\beta) = \pi\cdot\ln(\alpha+\beta) - \pi\cdot\ln 2$.

7.4.2 Din calculul integralei

$$F(a,b) = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2\cdot\cos^2 x + b^2\cdot\sin^2 x},\ a\ne 0,\ b\ne 0,$$

să se deducă valoarea integralei $G(a,b) = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\left(a^2\cdot\cos^2 x+b^2\cdot\sin^2 x\right)^2}$.

Indicație de rezolvare:

Fie funcția $f(x,a,b)=\dfrac{1}{a^2\cdot\cos^2 x+b^2\cdot\sin^2 x}$, care este continuă în raport cu ansamblul variabilelor.

$$\frac{\partial f}{\partial a}=\frac{-2a\cdot\cos^2 x}{\left(a^2\cdot\cos^2 x+b^2\cdot\sin^2 x\right)^2} \text{ şi } \frac{\partial f}{\partial b}=\frac{-2b\cdot\sin^2 x}{\left(a^2\cdot\cos^2 x+b^2\cdot\sin^2 x\right)^2} \text{ continue.}$$

Rezultă existența pentru $\dfrac{\partial F}{\partial a}=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{-2a\cdot\cos^2 x}{\left(a^2\cdot\cos^2 x+b^2\cdot\sin^2 x\right)^2}\mathrm{d}x$ şi

$$\frac{\partial F}{\partial b}=\int_0^{\pi/2}\frac{-2b\cdot\sin^2 x}{\left(a^2\cdot\cos^2 x+b^2\cdot\sin^2 x\right)^2}\mathrm{d}x.$$

Se observă că $\dfrac{1}{2a}\cdot\dfrac{\partial F}{\partial a}(a,b)+\dfrac{1}{2b}\cdot\dfrac{\partial F}{\partial b}(a,b)=-G(a,b)$, deci

$$G(a,b)=-\frac{1}{2a}\cdot\frac{\partial F}{\partial a}(a,b)-\frac{1}{2b}\cdot\frac{\partial F}{\partial b}(a,b).$$

Se calculează $F(a,b)=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{a^2\cdot\cos^2 x+b^2\cdot\sin^2 x}$, făcând schimbarea de variabilă $\mathrm{tg}\,x=t$ şi obținem $F(a,b)=\dfrac{\pi}{2ab}$.

Rezultă $G(a,b)=\dfrac{\pi}{4ab}\cdot\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\right)$.

7.4.3 Fie funcțiile $E,F:(0,1)\to\mathbb{R}$, definite prin

$$E(t)=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-t^2\cdot\sin^2 x}\,\mathrm{d}x \text{ şi } F(t)=\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-t^2\cdot\sin^2 x}}.$$

Să se demonstreze că:

i) $E'(t)=\dfrac{E(t)-F(t)}{t}$ şi $F'(t)=\dfrac{1}{t}\cdot\left[\dfrac{E(t)}{1-t^2}-F(t)\right]$, $(\forall)\ t\in(0,1)$;

ii) să se arate că E verifică ecuația:

$$E''(t)+\frac{1}{t}\cdot E'(t)+\frac{1}{1-t^2}\cdot E(t)=0,\ (\forall)\ t\in(0,1);$$

iii) să se demonstreze că $\int_0^t s \cdot F(s)\mathrm{d}s = E(t) - \left(1-t^2\right)\cdot F(t)$ şi

$$\int_0^t s\cdot E(s)\mathrm{d}s = \frac{1}{3}\cdot\left[\left(1+t^2\right)\cdot E(t) - \left(1-t^2\right)\cdot F(t)\right],\ (\forall)\ t\in(0,1).$$

Indicaţie de rezolvare:

i) $E'(t) = \int_0^{\pi/2} \frac{-t\cdot\sin^2 x\mathrm{d}x}{\sqrt{1-t^2\sin^2 x}}$ şi $F'(t) = \int_0^{\pi/2} \frac{t\cdot\sin^2 x\mathrm{d}x}{\left(1-t^2\sin^2 x\right)^{3/2}}$;

în acelaşi timp,

$$\frac{E(t)-F(t)}{t} = \int_0^{\pi/2}\left[\frac{1}{t}\cdot\sqrt{1-t^2\sin^2 x} - \frac{1}{t\cdot\sqrt{1-t^2\sin^2 x}}\right]\mathrm{d}x = E'(t)$$

similar se demonstrează că $F'(t) = \frac{1}{t}\cdot\left[\frac{E(t)}{1-t^2} - F(t)\right],\ (\forall)\ t\in(0,1)$;

ii) $E''(t) = \left(-\frac{1}{t^2}\right)\cdot\left[E(t)-F(t)\right] + \frac{1}{t}\cdot\left[E'(t)-F'(t)\right] =$

$$= \frac{1}{t^2}\cdot\left[F(t) - \frac{E(t)}{1-t^2}\right];$$

obţinem astfel:

$$E''(t) + \frac{1}{t}\cdot E'(t) + \frac{1}{1-t^2}\cdot E(t) =$$

$$= \frac{F(t)}{t^2} - \frac{E(t)}{t^2\left(1-t^2\right)} + \frac{E(t)}{t^2} - \frac{F(t)}{t^2} + \frac{E(t)}{1-t^2} = 0;$$

iii) se consideră funcţiile $\varphi(t) = E(t) - \left(1-t^2\right)\cdot F(t)$ şi

$$\psi(t) = \frac{1}{3}\cdot\left[\left(1+t^2\right)\cdot E(t) - \left(1-t^2\right)\cdot F(t)\right],\ (\forall)\ t\in(0,1);$$

$$\varphi'(t) = E'(t) + 2t\cdot F(t) - \left(1-t^2\right)\cdot F'(t) = t\cdot F(t)$$

şi $\psi'(t) = t\cdot E(t)$, pentru $(\forall)\ t\in(0,1)$.

În acelaşi timp, $\lim_{t \to 0} \varphi(t) = 0$ şi $\lim_{t \to 0} \psi(t) = 0$.

Rezultă că $\varphi(t) = \int_0^t s \cdot F(s) \mathrm{d}s$ şi $\psi(t) = \int_0^t s \cdot E(s) \mathrm{d}s$.

7.4.4 Pentru $n \in \mathbb{N}$ se defineşte funcția $J_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ prin

$$J_n(x) = \frac{x^n}{\pi \cdot (2n-1)!!} \cdot \int_{-1}^{1} \left(1-t^2\right)^{n-\frac{1}{2}} \cdot \cos(tx) \mathrm{d}t.$$

Să se arate că $J_{n+1}(x) = J_{n-1}(x) - 2 \cdot J_n'(x)$, $(\forall)\ n > 1$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

Indicație de rezolvare:

$$J_n'(x) = \frac{nx^{n-1}}{\pi(2n-1)!!} \cdot \int_{-1}^{1} \left(1-t^2\right)^{n-\frac{1}{2}} \cdot \cos(tx) \mathrm{d}t -$$
$$- \frac{x^n}{\pi(2n-1)!!} \cdot \int_{-1}^{1} \left(1-t^2\right)^{n-\frac{1}{2}} \cdot t \cdot \sin(tx) \mathrm{d}t,$$

de unde rezultă că $J_n'(x) = \frac{n}{x} \cdot J_n(x) - J_{n+1}(x)$.

În acelaşi timp avem:

$$J_n(x) = \frac{x^n}{\pi(2n-1)!!} \cdot \int_{-1}^{1} \left(1-t^2\right)^{n-\frac{1}{2}} \cdot \frac{\left(\sin(tx)\right)'}{x} \mathrm{d}t =$$
$$= \frac{x^{n-1}}{\pi(2n-1)!!} \cdot \int_{-1}^{1} (2n-1) \cdot t \cdot \left(1-t^2\right)^{n-\frac{3}{2}} \cdot \sin(tx) \mathrm{d}t =$$
$$= \frac{x^{n-1}}{\pi(2n-3)!!} \cdot \int_{-1}^{1} t \cdot \left(1-t^2\right)^{n-\frac{3}{2}} \cdot \sin(tx) \mathrm{d}t.$$

Obținem astfel că:

$$J_n'(x)=\frac{(n-1)x^{n-2}}{\pi(2n-3)!!}\cdot\int_{-1}^{1}t\left(1-t^2\right)^{n-\frac{3}{2}}\cdot\sin(tx)\,\mathrm{d}t+$$

$$+\frac{x^{n-1}}{\pi(2n-3)!!}\cdot\int_{-1}^{1}t^2\left(1-t^2\right)^{n-\frac{3}{2}}\cdot\cos(tx)\,\mathrm{d}t=$$

$$=(n-1)\cdot\frac{J_n(x)}{x}-\frac{x^{n-1}}{\pi(2n-3)!!}\cdot\int_{-1}^{1}\left(1-t^2-1\right)\left(1-t^2\right)^{n-\frac{3}{2}}\cdot\cos(tx)\,\mathrm{d}t=$$

$$=(n-1)\cdot\frac{J_n(x)}{x}-\frac{x^{n-1}}{\pi(2n-3)!!}\cdot\int_{-1}^{1}\left(1-t^2\right)^{n-\frac{1}{2}}\cdot\cos(tx)\,\mathrm{d}t+J_{n-1}(x)=$$

$$=(n-1)\cdot\frac{J_n(x)}{x}-\frac{(2n-1)}{x}\cdot J_n(x)+J_{n-1}(x)=-\frac{n}{x}\cdot J_n(x)+J_{n-1}(x).$$

Adunând relațiile $J_n'(x)=\frac{n}{x}\cdot J_n(x)-J_{n+1}(x)$ şi $J_n'(x)=-\frac{n}{x}\cdot J_n(x)+J_{n-1}(x)$, obținem $2\cdot J_n'(x)=J_{n-1}(x)-J_{n+1}(x)$, deci $J_{n+1}(x)=J_{n-1}(x)-2\cdot J_n'(x),\ (\forall)\ n>1,\ (\forall)\ x\in\mathbb{R}$.

7.4.5 Fie funcția $\varphi:[0,a]\to\mathbb{R}$ continuă pe $[0,a]$ şi $A=[0,a]\times\{0\}\times\{0\}$. Să se demonstreze că funcția $u:\mathbb{R}^3\setminus A\to\mathbb{R}$, definită prin:

$$u(x,y,z)=\int_0^a\frac{\varphi(t)\,\mathrm{d}t}{\sqrt{(x-t)^2+y^2+z^2}}$$

verifică ecuația lui Laplace

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}=0.$$

Indicație de rezolvare:

Fie funcția $v:\mathbb{R}^3\setminus A\to\mathbb{R}$, $v(x,y,z)=\frac{1}{(x-t)^2+y^2+z^2}$, pentru care avem $\frac{\partial v}{\partial x}=-(x-t)\cdot\left[(x-t)^2+y^2+z^2\right]^{-3/2}$ şi

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=-\left[(x-t)^2+y^2+z^2\right]^{-3/2}+3\cdot(x-t)^2\cdot\left[(x-t)^2+y^2+z^2\right]^{-5/2}.$$

Similar obținem:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=-\left[(x-t)^2+y^2+z^2\right]^{-3/2}+3\cdot y^2\cdot\left[(x-t)^2+y^2+z^2\right]^{-5/2},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=-\left[(x-t)^2+y^2+z^2\right]^{-3/2}+3\cdot z^2\cdot\left[(x-t)^2+y^2+z^2\right]^{-5/2}.$$

Obținem astfel:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\int_0^a \varphi(t)\cdot 0\mathrm{d}t=0.$$

7.4.6 În studiul vibrațiilor neliniare, se urmărește înlocuirea pe un interval $[-a,a]$ a unei funcții neliniare $y=f(x)$, cu o funcție liniară $y_1=\omega_0^2\cdot x$.

i) Să se afle valoarea ω_0 a frecvenței proprii pentru vibrația liniară, astfel încât abaterea medie pătratică ponderată:

$$I\left(\omega_0^2\right)=\int_{-a}^{a}\left[x\left(f(x)-x\cdot\omega_0^2\right)\right]^2\mathrm{d}x$$

să fie minimă.

ii) Să se aplice rezultatul de la punctul anterior pentru funcția $f(x)=\frac{g}{\ell}\cdot\left(x-\frac{x^3}{6}\right)$.

iii) Pentru ω_0 găsit la punctul ii) să se dezvolte perioada $T(a)=\frac{2\pi}{\omega_0(a)}$ în serie de puteri ale lui a şi să se precizeze valorile lui a pentru care este valabilă dezvoltarea.

Indicație de rezolvare:

i) fie $\omega_0^2=t$, deci $I(t)=\int_{-a}^{a} x^2\cdot\left(f(x)-tx\right)^2\mathrm{d}x$; astfel,

$$I'(t)=\int_{-a}^{a}-2\cdot x^3\cdot\left(f(x)-tx\right)\mathrm{d}x=0$$

este echivalent cu

$$\int_{-a}^{a} x^3 \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^{a} x^4 \cdot t\,\mathrm{d}x = \frac{t}{5} \cdot 2a^5;$$

rezultă $t = \frac{5}{2a^5} \cdot \int_{-a}^{a} x^3 \cdot f(x)\,\mathrm{d}x$, deci $\omega_0^2 = \frac{5}{2a^5} \cdot \int_{-a}^{a} x^3 \cdot f(x)\,\mathrm{d}x$;

ii) $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \cdot \sqrt{1 - \frac{5a^2}{42}}$;

iii) avem $T(a) = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\ell}{g}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{5a^2}{42}}}$, care pentru $|a| < \sqrt{\frac{42}{5}}$ admite dezvoltarea în serie de puteri de forma:

$$T(a) = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\ell}{g}} \cdot \left(1 + \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \left(\frac{5}{42}\right)^n \cdot a^{2n}\right).$$

7.4.7 Să se arate că dacă integrala $\int_0^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ este absolut convergentă, atunci $\lim_{n \to \infty} \int_0^{\infty} f(x) \cdot \sin(nx)\,\mathrm{d}x = 0$.

Indicație de rezolvare:

Integrala $\int_0^{\infty} f(x) \cdot \sin(nx)\,\mathrm{d}x$ este uniform convergentă. Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar. Atunci există $b(\varepsilon) \in (0, +\infty)$, astfel încât $\left| \int_{b(\varepsilon)}^{\infty} f(x) \cdot \sin(nx)\,\mathrm{d}x \right| < \varepsilon,\ (\forall)\ n \in \mathbb{N}$.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\int_0^{\infty} f(x)\cdot\sin(nx)\,\mathrm{d}x\right| \le$$

$$\le \lim_{n\to\infty}\left(\left|\int_0^{b(\varepsilon)} f(x)\cdot\sin(nx)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{b(\varepsilon)}^{\infty} f(x)\cdot\sin(nx)\,\mathrm{d}x\right|\right) \le$$

$$\le \lim_{n\to\infty}\left(\left|\int_0^{b(\varepsilon)} f(x)\cdot\sin(nx)\,\mathrm{d}x\right| + \varepsilon\right) = \varepsilon,$$

de unde rezultă că $\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty} f(x)\cdot\sin(nx)\,\mathrm{d}x = 0$.

7.4.8 Să se demonstreze că dacă $\int_0^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă, atunci integralele $F_1(y)=\int_0^{\infty} f(x)\cdot \mathrm{e}^{-yx}\,\mathrm{d}x$ şi $F_2(y)=\int_0^{\infty} f(x)\cdot \mathrm{e}^{-yx^2}\,\mathrm{d}x$, unde $y\ge 0$ sunt uniform convergente.

Indicație de rezolvare:

Pentru $F_1(y)=\int_0^{\infty} f(x)\cdot \mathrm{e}^{-yx}\,\mathrm{d}x$ se foloseşte faptul că $\int_0^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ este uniform convergentă în raport cu parametrul $y\ge 0$, iar funcția $g(x,y)=\mathrm{e}^{-yx}$ este descrescătoare în raport cu x pentru orice $y\ge 0$ şi $|g(x,y)|\le 1$, $(\forall)\ x,\ y\in[0,+\infty)$.

Din Criteriul lui Leibniz rezultă convergența uniformă a integralei $F_1(y)=\int_0^{\infty} f(x)\cdot \mathrm{e}^{-yx}\,\mathrm{d}x$.

Similar se demonstrează convergența uniformă pentru

$$F_2(y)=\int_0^{\infty} f(x)\cdot \mathrm{e}^{-yx^2}\,\mathrm{d}x.$$

7.4.9 Să se studieze convergența uniformă a următoarelor integrale improprii cu parametri:

a) $F(t)=\int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2+t^2},\ t\in \mathbb{R}\setminus\{0\};$

b) $F(t)=\int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\cdot\sin(tx)\,\mathrm{d}x,\ t\in\mathbb{R};$

c) $F(t)=\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{\cos(tx)\,\mathrm{d}x}{1+x^2},\ t\in\mathbb{R};$

d) $F(\alpha)=\int\limits_0^\infty \frac{\sin(\alpha x)}{x}\mathrm{d}x,\ \alpha>0;$

e) $F(t)=\int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-tx^2}\,\mathrm{d}x,\ t>0.$

Indicație de rezolvare:

a) fie $\varepsilon>0$ arbitrar şi $x',\ x''$, astfel încât $0<x'<x''$; avem

$$\left|\int\limits_{x'}^{x''}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+t^2}\right|=\frac{1}{|t|}\cdot\left(\operatorname{arctg}\frac{x''}{|t|}-\operatorname{arctg}\frac{x'}{|t|}\right)=\frac{1}{|t|}\cdot\operatorname{arctg}\frac{|t|(x''-x')}{t^2+x'\cdot x''}\le\frac{1}{x'};$$

pentru un $b(\varepsilon)\in(0,+\infty)$ şi $x',\ x''\in(b(\varepsilon),+\infty)$, avem $x'>b(\varepsilon)$, deci $\frac{1}{x'}<\frac{1}{b(\varepsilon)}$ şi astfel $\left|\int\limits_{x'}^{x''}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+t^2}\right|\le\frac{1}{x'}<\frac{1}{b(\varepsilon)}=\varepsilon$ şi am găsit astfel un $b(\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}$, deci integrala este uniform convergentă în raport cu parametrul $t\in\mathbb{R}\setminus\{0\};$

b) $|f(x,t)|=\left|\mathrm{e}^{-x}\cdot\sin(tx)\right|\le\mathrm{e}^{-x},\ (\forall)\ x\in[0,+\infty),\ (\forall)\ t\in\mathbb{R};$

se consideră funcția $g:[0,+\infty)\to\mathbb{R}_+,\ g(x)=\mathrm{e}^{-x}$; din convergența integralei improprii $\int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ şi din $|f(x,t)|\le g(x),\ (\forall)\ x,t$, rezultă convergența uniformă a integralei $\int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\cdot\sin(tx)\,\mathrm{d}x;$

c) uniform convergentă;

d) fie integrala $I(\alpha,\beta)=\int_0^\infty e^{-\beta x}\cdot\frac{\sin(\alpha x)}{x}dx,\ \alpha,\ \beta>0$ şi fie funcţia $f(x,\alpha,\beta)=e^{-\beta x}\cdot\frac{\sin(\alpha x)}{x}$ continuă în raport cu ansamblul variabilelor, iar integrala $\int_0^\infty e^{-\beta x}\cdot\frac{\sin(\alpha x)}{x}dx,\ \alpha,\ \beta>0$ este convergentă; $\frac{\partial f}{\partial\alpha}=e^{-\beta x}\cdot\cos(\alpha x)$ este continuă şi integrala $\int_0^\infty\frac{\partial f}{\partial\alpha}dx=\int_0^\infty e^{-\beta x}\cdot\cos(\alpha x)dx$ este uniform convergentă în raport cu parametrul $\alpha>0$, deoarece $\left|e^{-\beta x}\cdot\cos(\alpha x)\right|\le e^{-\beta x}$, iar integrala $\int_0^\infty e^{-\beta x}\,dx$ este convergentă pentru orice $\beta>0$.

Astfel, există $\frac{\partial I}{\partial\alpha}=\int_0^\infty e^{-\beta x}\cdot\cos(\alpha x)dx=\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}$. Integrând în raport cu α, obţinem $I(\alpha,\beta)=\mathrm{arctg}\frac{\alpha}{\beta}+C$, unde $C=0$, deci $I(\alpha,\beta)=\mathrm{arctg}\frac{\alpha}{\beta}$.

În acelaşi timp, integrala $I(\alpha,\beta)$ este uniform convergentă în raport cu $\beta>0$ şi $\lim_{\beta\to0}I(\alpha,\beta)=\int_0^\infty\frac{\sin(\alpha x)}{x}dx=F(\alpha)$, deci $F(\alpha)=\lim_{\beta\to0}\mathrm{arctg}\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\pi}{2}$;

e) se demonstrează că integrala nu este uniform convergentă, prin reducere la absurd; dacă ar fi uniform convergentă, pentru orice $\varepsilon>0$, există $b(\varepsilon)>0$, astfel încât pentru $(\forall)x',x''\in(b(\varepsilon),+\infty)$, să avem:

$$\left|\int_{x'}^{x''}e^{-tx^2}\,dx\right|<\varepsilon,\ (\forall)\ t>0.$$

Fie $\varepsilon=\frac{1}{2}\cdot\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx$ şi fie $x_0=\max\{1,b(\varepsilon)\}$. Se consideră $x'=x_0$ şi $x''=x_0+\lambda,\ \lambda>0$.

Rezultă $\int_{x_0}^{x_0+\lambda}e^{-tx^2}\,dx=\frac{1}{\sqrt{t}}\cdot\int_{x_0\sqrt{t}}^{(x_0+\lambda)\sqrt{t}}e^{-y^2}\,dy$, unde s-a făcut schimbarea de variabilă $y=x\sqrt{t}$.

Pentru $t=\dfrac{1}{x_0^2}$ obținem $\displaystyle\int_{x_0}^{x_0+\lambda} \mathrm{e}^{-tx^2}\,\mathrm{d}x = x_0\cdot\int_1^{1+\frac{\lambda}{x_0}} \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y$, iar pentru $x_0\ge 1$ avem $\displaystyle\int_{x_0}^{x_0+\lambda} \mathrm{e}^{-tx^2}\,\mathrm{d}x = x_0\cdot\int_1^{1+\frac{\lambda}{x_0}} \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y \ge \int_1^{1+\frac{\lambda}{x_0}} \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y$, pentru $(\forall)\ \lambda>0$, ceea ce contrazice alegerea lui $\varepsilon=\dfrac{1}{2}\cdot\displaystyle\int_1^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

7.4.10 Să se calculeze următoarele integrale cu parametri:

a) $I(\alpha,\beta)=\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\ln\left(1+\alpha^2x^2\right)\cdot\ln\left(1+\beta^2x^2\right)}{x^4}\,\mathrm{d}x$;

b) $I(u,v)=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\ln\left(u^2\cdot\sin^2 x+v^2\cdot\cos^2 x\right)\mathrm{d}x,\ u,\ v>0$;

c) $I(a,b)=\displaystyle\int_0^{\infty}\left(\mathrm{e}^{-\frac{a^2}{x^2}}-\mathrm{e}^{-\frac{b^2}{x^2}}\right)\mathrm{d}x,\ a,\ b>0$;

d) $I(u,v)=\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\ln\left(u^2+x^2\right)}{x^2+v^2}\,\mathrm{d}x,\ u\ne 0,\ v\ne 0$.

Indicație de rezolvare:

a) $\dfrac{2\pi}{3}\cdot\left[\alpha\beta(\alpha+\beta)+\alpha^3\cdot\ln\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}+\beta^3\cdot\ln\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\right]$;

b) $\pi\cdot\ln\dfrac{u+v}{2}$;

c) $\sqrt{\pi}(b-a)$;

d) $\pi\cdot\ln\left[|u|^{\frac{1-|v|}{|v|}}\cdot\left(|u|+|v|\right)\right]$.

7.4.11 Fie funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ cu proprietățile:

a) f este continuă pe $(0,+\infty)$;

b) $\lim\limits_{x\searrow 0} f(x)=m$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=M$.

i) Să se calculeze integrala $F(a,b)=\displaystyle\int_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x$;

ii) Să se arate că $F(a,b)$ este uniform convergentă pentru $(\forall)$ $a,\ b\in[c,d]$, pentru $(\forall)$ $[c,d]\subset(0,+\infty)$.

Indicație de rezolvare:

i) fie funcția $\varphi(x,a,b)=\dfrac{f(ax)-f(bx)}{x}$, unde $a,\ b\in[c,d]$; pentru $(\forall)$ $\lambda,\ \mu\in(0,+\infty)$, cu $\lambda<\mu$, are sens integrala

$$\int_\lambda^\mu \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x=\int_\lambda^\mu \frac{f(ax)}{x}\mathrm{d}x-\int_\lambda^\mu \frac{f(bx)}{x}\mathrm{d}x=\int_{\lambda a}^{\mu a}\frac{f(y)}{y}\mathrm{d}y-\int_{\lambda b}^{\mu b}\frac{f(y)}{y}\mathrm{d}y=$$

$$=\int_{\lambda a}^{\lambda b}\frac{f(y)}{y}\mathrm{d}y-\int_{\mu a}^{\mu b}\frac{f(y)}{y}\mathrm{d}y=f(\xi)\cdot\int_{\lambda a}^{\lambda b}\frac{1}{y}\mathrm{d}y-f(\eta)\cdot\int_{\mu a}^{\mu b}\frac{1}{y}\mathrm{d}y=$$

$$=\big(f(\xi)-f(\eta)\big)\cdot\ln\left(\frac{b}{a}\right),$$

unde $\xi\in[\lambda a,\lambda b]$, $\eta\in[\mu a,\mu b]$; obținem astfel

$$F(a,b)=\lim_{\substack{\lambda\to 0\\ \mu\to\infty}}\int_\lambda^\mu \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x=(m-M)\cdot\ln\left[\frac{b}{a}\right];$$

ii) pentru $0<\lambda<\mu<+\infty$, avem

$$\left|\int_\lambda^\mu \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x-F(a,b)\right|=$$

$$=\left|\big(f(\xi)-f(\eta)\big)\cdot\ln\left(\frac{b}{a}\right)-(m-M)\cdot\ln\left(\frac{b}{a}\right)\right|=\big|\big(f(\xi)-m\big)+\big(M-f(\eta)\big)\big|\cdot\ln\left(\frac{b}{a}\right),$$

unde $\xi\in[\lambda a,\lambda b]$, $\eta\in[\mu a,\mu b]$.

Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar. Deoarece $\lim\limits_{x \searrow 0} f(x) = m$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = M$, rezultă că există $0 < \lambda' < \mu' < +\infty$, astfel încât pentru orice $\xi \in (0,\lambda')$ şi orice $\eta \in (\mu',+\infty)$ avem $|f(\xi) - m| < \delta(\varepsilon)$ şi $|M - f(\eta)| < \delta(\varepsilon)$.

Obţinem astfel $\left|\int\limits_{\lambda}^{\mu} \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\mathrm{d}x - F(a,b)\right| < 2\delta(\varepsilon)\cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right) = \varepsilon$, deci am găsit un $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$, pentru orice $\varepsilon > 0$. Rezultă că $F(a,b)$ este uniform convergentă.

7.4.12 Fie funcţia $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ cu proprietăţile:

a) f este continuă pe $(0,+\infty)$;

b) $\int\limits_{A}^{\infty} \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x,\ A > 0$ este convergentă.

i) Să se calculeze integrala $F(a,b) = \int\limits_{0}^{\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\mathrm{d}x$.

ii) Să se arate că $F(a,b)$ este uniform convergentă pentru $(\forall)\ a,\ b \in [c,d]$, pentru $(\forall)\ [c,d] \subset (0,+\infty)$.

Indicaţie de rezolvare:

i) Ca la exerciţiul anterior, fie $(\forall)\ \lambda,\ \mu \in (0,+\infty)$, cu $\lambda < \mu$.

$$\int_{\lambda}^{\mu}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x=\int_{\lambda}^{\mu}\frac{f(ax)}{x}\mathrm{d}x-\int_{\lambda}^{\mu}\frac{f(bx)}{x}\mathrm{d}x=\int_{\lambda a}^{\mu a}\frac{f(y)}{y}\mathrm{d}y-\int_{\lambda b}^{\mu b}\frac{f(y)}{y}\mathrm{d}y=$$

$$=\int_{\lambda a}^{\lambda b}\frac{f(y)}{y}\mathrm{d}y-\int_{\mu a}^{\mu b}\frac{f(y)}{y}\mathrm{d}y=f(\xi)\cdot\ln\left(\frac{b}{a}\right)-\int_{\mu a}^{\mu b}\frac{f(y)}{y}\mathrm{d}y,$$

unde $\xi\in[\lambda a,\lambda b]$.

Obținem că

$$F(a,b)=\int_{0}^{\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\int_{\lambda}^{\mu}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x=f(0_+)\cdot\ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

ii) Se demonstrează ca la exercițiul anterior.

7.4.13 Fie funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ cu proprietățile:

a) f este integrabilă pe orice compact $[a,b]\subset(0,+\infty)$;

b) $\lim_{x\to\infty}f(x)=M$;

c) $\int_{0}^{A}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x,\ A<+\infty$ este convergentă.

i) Să se calculeze integrala $F(a,b)=\int_{0}^{\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x$.

ii) Să se arate că $F(a,b)$ este uniform convergentă pentru $(\forall)\ a,\ b\in[c,d]$, pentru $(\forall)\ [c,d]\subset(0,+\infty)$.

Indicație de rezolvare:

i) Urmând demonstrațiile de la exercițiile precedente, obținem $F(a,b)=-M\cdot\ln\left(\frac{b}{a}\right)$.

ii) $$\left|F(a,b)-\int_{\lambda}^{\mu}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x\right|\le\left|\int_{a\lambda}^{b\lambda}\frac{f(y)}{y}\mathrm{d}y\right|+\left|f(\eta)-M\right|\cdot\ln\left(\frac{b}{a}\right),$$

unde $\eta\in[a\mu,\mu]$ şi $0<\lambda<\mu<+\infty$.

Fie $\varepsilon>0$ arbitrar. Ținând seama de convergența integralei $\int_0^A \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x,\ A<+\infty$, rezultă că există $0<\lambda'<\mu'<+\infty$, astfel încât pentru orice $\lambda\in(0,\lambda')$ şi orice $\mu\in(\mu',+\infty)$ să avem $\left|F(a,b)-\int_\lambda^\mu \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$.

7.4.14 Să se calculeze integralele:

a) $\int_0^\infty \frac{\sin(ax)-\sin(bx)}{x}\mathrm{d}x,\ a,\ b>0$;

b) $\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}(ax)-\operatorname{arctg}(bx)}{x}\mathrm{d}x,\ a,\ b>0$;

c) $\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-ax^2}-\mathrm{e}^{-bx^2}}{x}\mathrm{d}x,\ a,\ b>0$.

Indicație de rezolvare:

a) fie funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin x$, continuă, iar integrala $\int_A^\infty \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ este convergentă pentru $A>0$; aplicând rezultatul exercițiului 7.4.12, obținem că $\int_0^\infty \frac{\sin(ax)-\sin(bx)}{x}\mathrm{d}x=0$;

b) fie funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{arctg} x$, care este integrabilă pe orice compact $[a,b]\subset(0,+\infty)$; $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\frac{\pi}{2}$ şi integrala $\int_0^A \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$ este convergentă pentru orice $A<\infty$; aplicând rezultatul exercițiului 7.4.13, obținem că $\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}(ax)-\operatorname{arctg}(bx)}{x}\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{2}\cdot\ln\left(\frac{b}{a}\right)$;

c) $\frac{1}{2}\cdot\ln\left(\frac{b}{a}\right)$.

7.4.15 Fie funcția

$$F:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R},\ F(a,b)=\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\left[x^2+1+g(x)\right]\cdot a^2-g(x)\cdot b^2},$$

unde $g:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ este continuă şi mărginită, iar $b\le a$.

a) Să se studieze posibilitatea derivării parțiale a funcției F în raport cu variabilele a şi b.

b) Să se arate că $F(a,b)=-\frac{a}{2}\cdot\frac{\partial F}{\partial a}-\frac{b}{2}\cdot\frac{\partial F}{\partial b}$.

Indicație de rezolvare:

a) Fie funcția $f(x,a,b)=\frac{1}{\left[x^2+1+g(x)\right]\cdot a^2-b^2\cdot g(x)}$.

Rezultă că

$$f(x,a,b)=\frac{1}{a^2\left(x^2+1\right)+\left(a^2-b^2\right)\cdot g(x)}<\frac{1}{a^2\left(x^2+1\right)}$$

şi integrala $\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{a^2\left(x^2+1\right)}$ este convergentă, deci $F(a,b)$ are sens.

$$\left|\frac{\partial f}{\partial a}\right|=\frac{2|a|\left(x^2+1+g(x)\right)}{\left\{\left[x^2+1+g(x)\right]\cdot a^2-b^2\cdot g(x)\right\}^2}\le\frac{2|a|\left(x^2+1+g(x)\right)}{\left[a^2\left(x^2+1\right)\right]^2}\le$$

$$\le\frac{2a\left(x^2+1\right)+M}{a^4\left(x^2+1\right)^2}\le\frac{2}{a^3}\cdot\frac{1}{\left(x^2+1\right)}+M\cdot\frac{1}{a^4\left(x^2+1\right)^2},$$

unde se ține seama de faptul că funcția g este mărginită, deci există M astfel încât $g(x)\le M,\ (\forall)\ x\in\mathbb{R}_+$. Cum integralele $\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\left(x^2+1\right)}$ şi $\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\left(x^2+1\right)^2}$ sunt convergente, rezultă că $\int_0^{\infty}\frac{\partial f}{\partial a}\mathrm{d}x$ este uniform convergentă.

Similar, se demonstrează că integrala $\int_0^{\infty}\frac{\partial f}{\partial b}\mathrm{d}x$ este uniform convergentă.

Rezultă că funcția F se poate deriva parțial în raport cu a şi cu b.

b) Avem $\dfrac{\partial F}{\partial a}=-2a\cdot\displaystyle\int_0^{\infty}\dfrac{x^2+1+g(x)}{\left\{\left[x^2+1+g(x)\right]\cdot a^2-b^2\cdot g(x)\right\}^2}\mathrm{d}x$ şi

$$\frac{\partial F}{\partial b}=2b\cdot\int_0^{\infty}\frac{g(x)}{\left\{\left[x^2+1+g(x)\right]\cdot a^2-b^2\cdot g(x)\right\}^2}\mathrm{d}x.$$

Obţinem astfel că $F(a,b)=-\dfrac{a}{2}\cdot\dfrac{\partial F}{\partial a}-\dfrac{b}{2}\cdot\dfrac{\partial F}{\partial b}$.

7.4.16 Fie funcţia $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ cu proprietăţile:

i) f este continuă şi mărginită pe $[0,+\infty)$;

ii) integrala $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$ este convergentă.

Atunci $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}F(y)\mathrm{d}y$, unde $F(y)=\displaystyle\int_0^{\infty}f(x)\cdot \mathrm{e}^{-yx}\,\mathrm{d}x$.

Indicaţie de rezolvare:

Se consideră funcţia $G(y)=\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{f(x)}{x}\cdot\mathrm{e}^{-yx}\,\mathrm{d}x$. Integrala $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{f(x)}{x}\cdot\mathrm{e}^{-yx}\,\mathrm{d}x$ este uniform convergentă în raport cu parametrul $y\in[0,+\infty)$, deoarece se verifică cerinţele din Criteriul lui Leibniz, pentru $g(x,y)=\mathrm{e}^{-yx}$, care este monotonă pentru orice $y\in[0,+\infty)$ şi $\left|\mathrm{e}^{-yx}\right|\le 1,\ (\forall)\ x,\ y\in[0,+\infty)$. Rezultă că funcţia $G(y)=\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{f(x)}{x}\cdot\mathrm{e}^{-yx}\,\mathrm{d}x$ este continuă şi $G'(y)=-F(y)$ este, de asemenea, continuă.

Obţinem astfel că pentru orice $0<\alpha<\beta<+\infty$

$$\int_{\alpha}^{\beta}F(y)\mathrm{d}y=-G(y)\Big|_{\alpha}^{\beta}=G(\alpha)-G(\beta)=\int_0^{\infty}\frac{f(x)}{x}\cdot\mathrm{e}^{-\alpha x}\,\mathrm{d}x-\int_0^{\infty}\frac{f(x)}{x}\cdot\mathrm{e}^{-\beta x}\,\mathrm{d}x.$$

Cum $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int\limits_0^\infty \frac{f(x)}{x}\cdot \mathrm{e}^{-\alpha x}\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^\infty \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$, iar $\lim\limits_{\beta\to\infty}\int\limits_0^\infty \frac{f(x)}{x}\cdot \mathrm{e}^{-\beta x}\,\mathrm{d}x=0$,

obținem că $\int\limits_0^\infty \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x=\int\limits_0^\infty F(y)\,\mathrm{d}y$.

7.4.17 Utilizând exercițiul anterior, să se deducă valorile integralelor:

a) $I=\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$; **b)** $I=\int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-at}-\mathrm{e}^{-bt}}{t}\mathrm{d}t,\ a,\ b>0$.

Indicație de rezolvare:

a) fie funcția $f(x)=\sin x$; conform exercițiului anterior, rezultă că $I=\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\int\limits_0^\infty F(y)\,\mathrm{d}y$, unde $F(y)=\int\limits_0^\infty \sin x\cdot \mathrm{e}^{-yx}\,\mathrm{d}x$ şi rezultă că

$$I=\int\limits_0^\infty\left(\int\limits_0^\infty \sin x\cdot \mathrm{e}^{-yx}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=\int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{d}y}{1+y^2}=\frac{\pi}{2};$$

b) $I=\ln\left(\frac{b}{a}\right)$.

7.4.18 Să se calculeze următoarele integrale Euler:

a) $\int\limits_0^\infty x^{2n}\cdot \mathrm{e}^{-ax^2}\,\mathrm{d}x,\ a>0$; **b)** $\int\limits_0^\infty x^m\cdot \mathrm{e}^{-x^n}\,\mathrm{d}x,\ m,\ n\in \mathbb{N}$;

c) $\int\limits_0^1 x^{p-1}\cdot \ln^n x\,\mathrm{d}x,\ n\in \mathbb{N}$; **d)** $\int\limits_0^1 \sqrt{x-x^2}\,\mathrm{d}x$;

e) $\int\limits_0^1 x\sqrt{x^3(1-x)}\,\mathrm{d}x$; **f)** $\int\limits_0^\infty \frac{x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x$;

g) $\int\limits_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x,\ a>0$; **h)** $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[n]{1-x^m}},\ n\in \mathbb{N},\ m>0$;

i) $\int\limits_0^1 \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{(x+p)^{a+b}}\mathrm{d}x,\ a,\ b>0,\ p>-1$.

Indicație de rezolvare:

a) se face substituția $ax^2 = t$, de unde rezultă că $\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2\sqrt{a}\cdot\sqrt{t}}\mathrm{d}t$, iar integrala devine $I = \dfrac{1}{2a^{n+1/2}}\cdot\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t}\cdot t^{n-1/2}\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2a^{n+1/2}}\cdot\Gamma\left(n+\dfrac{1}{2}\right)$;

b) se face substituția $x^n = t$, deci $\mathrm{d}x = \dfrac{1}{n}\cdot t^{\frac{1}{n}-1}\mathrm{d}t$; integrala devine $I = \dfrac{1}{n}\cdot\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t}\cdot t^{\frac{m+1}{n}-1}\mathrm{d}t = \dfrac{1}{n}\cdot\Gamma\left(\dfrac{m+1}{n}\right)$;

c) se face substituția $x = \mathrm{e}^{-t}$, deci $\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ și obținem $I = (-1)^n\cdot\dfrac{n!}{p^{n+1}}$;

d) $\int_0^1 \sqrt{x-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^{1/2}\cdot(1-x)^{1/2}\mathrm{d}x = B\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2}\right) =$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(3)} = \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{2}+1\right)}{2!} = \frac{\left(\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2}{2} = \frac{1}{8}\cdot\pi;$$

e) $\dfrac{5\pi}{27}$;

f) se face substituția $x^4 = \dfrac{t}{1-t}$ și obținem

$$I = \frac{1}{4}\cdot B\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}\cdot\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}\cdot\Gamma\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4};$$

g) $\dfrac{\pi a^4}{16}$;

h) se face substituția $x^m = t$ și obținem

$$I = \frac{1}{m}\cdot\int_0^1 t^{\frac{1}{m}-1}\cdot(1-t)^{\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{m}\cdot B\left(\frac{1}{m},1-\frac{1}{n}\right);$$

i) se face substituția $t = \dfrac{x(1+p)}{x+p}$ şi se găseşte $I = \dfrac{B(a,b)}{p^b(p+1)^a}$.

TEST DE AUTOEVALUARE

1 Să se calculeze următoarele integrale cu parametri:

a) $I(a,b)=\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\mathrm{d}x,\ a,\ b \geq 0$;

b) $I(\alpha)=\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}(\alpha x)}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x,\ \alpha > 0$;

c) $I(\alpha,\beta)=\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}(\alpha x)\cdot\operatorname{arctg}(\beta x)}{x^2}\mathrm{d}x,\ \alpha,\ \beta > 0$.

2 Să se deducă egalitățile:

a) $\int_0^\infty \frac{2t\,\mathrm{d}x}{\left(x^2+t^2\right)^2} = -\frac{\pi}{2t^2},\ t > 0$;

b) $\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}\frac{t}{x} - \operatorname{arctg}\frac{1}{x}}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\cdot\ln t,\ t > 0$;

c) $\int_0^\infty \frac{1-\cos(xt)}{x}\cdot \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot\ln\left(1+t^2\right)$.

3 Să se calculeze următoarele integrale Euler:

a) $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}},\ a,\ b > 0$;

b) $\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x}\,(1+x)}$;

c) $\int_0^\infty \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$;

d) $\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{1+x^n}\mathrm{d}x,\ m,\ n > 0$.

TEMĂ DE CONTROL

1 Fie $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\arcsin x$ şi

$$g:(-1,1)\to\mathbb{R},\ g(x)=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

a) Să se dezvolte în serie de puteri ale lui x funcţia f şi să se precizeze mulţimea pe care are loc dezvoltarea.

b) Să se studieze natura integralei $I=\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$ şi apoi să se calculeze valoarea sa.

c) Utilizând rezultatele obţinute, să se deducă sumele seriilor numerice $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$ şi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

2 Să se dezvolte în serie de puteri ale lui x funcţia $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definită prin $g(x)=\int_0^x \frac{\mathrm{e}^t-1}{t}\mathrm{d}t$. Să se determine mulţimea de convergenţă a seriei obţinute şi să se arate că $g(1)=\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t-1}{t}\mathrm{d}t=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)\cdot\ldots\cdot(n+k)}\right)$.

3 **a)** Fie funcţia $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, definită prin

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{pentru } (x,y)\neq(0,0);\\ 0, & \text{pentru } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Să se studieze continuitatea, existenţa derivatelor parţiale şi diferenţiabilitatea funcţiei f în $(0,0)$.

b) Să se calculeze $I_n=\int_0^{\pi/2}\left[f\left(\sin\frac{t}{2},\cos\frac{t}{2}\right)\right]^n\mathrm{d}t$, pentru $n=2k$, $n=2k+1$.

c) Să se arate că şirul de funcţii $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite prin $g_n(x) = \dfrac{1}{2n} \cdot f\left(x^2, n\right)$ este uniform convergent pe $\mathbb{R}$ către o funcție continuă $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi să se calculeze $g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} g_n(x)$.

4 Se consideră funcţia $F : [-1,1]\times[-1,1] \to \mathbb{R}$ continuă în raport cu ansamblul variabilelor, cu proprietatea că există $\alpha, \beta, k \in \mathbb{R}^*$, astfel încât $\alpha \cdot F(u,v) + \beta \cdot F(v,u) = k,\ (\forall)\ u, v \in [-1,1]$.

a) Să se calculeze $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} F(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$.

b) Să se determine $\alpha, \beta, k \in \mathbb{R}^*$ pentru cazul particular $F(u,v) = \dfrac{u^2 + 2uv + 2}{5 + 4uv}$, unde $u, v : \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$, $u(x) = \sin x$, $v(x) = \cos x$.

Utilizând rezultatele obţinute anterior, să se calculeze valoarea integralei $J = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x + \sin 2x + 2}{5 + 2\sin 2x}\,\mathrm{d}x$.

5 **(i)** Să se calculeze $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^3 + 1}$.

(ii) Să se determine $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât integrala $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - x + \lambda}$ să fie convergentă;

(iii) Fie $I_{k,n} = \displaystyle\int_0^1 x^k \cdot \ln^n x\,\mathrm{d}x$, unde $k, n \in \mathbb{N}$, $\left(I_{0,0} = 1\right)$.

a) Să se arate că $I_{k,n} = -\dfrac{n}{k+1} \cdot I_{k,n-1},\ n \geq 1$.

b) Să se arate, folosind integrarea termen cu termen a seriilor de funcţii că $\displaystyle\int_0^1 x^x \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \cdot \frac{1}{k^k}$.

6 **a)** Să se găsească mulțimea din $\mathbb{R}$ pe care converge seria $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^n}{n}$ şi să se cerceteze convergența uniformă pe $[0,1]$.

b) Să se calculeze $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^n}{n}$ pentru x în mulțimea de convergență.

c) Folosind $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$, să se calculeze $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)^2}$.

d) Să se demonstreze convergența şi să se calculeze integrala $I=\int_0^1 \ln x\cdot\ln(1+x)\,\mathrm{d}x$ folosind dezvoltarea în serie de puteri a funcției $\ln(1+x)$ în jurul lui zero.

7 Fie integralele $y(t)=\int_0^{\infty}\frac{\sin tx}{x\left(1+x^2\right)}\mathrm{d}x$ şi $z(t)=\int_0^{\infty}\frac{\cos tx}{\left(1+x^2\right)}\mathrm{d}x$, unde $t\in[0,+\infty)$. Să se verifice aplicabilitatea teoremei de derivabilitate în raport cu parametrul t.

8 Să se calculeze integrala $I(\alpha)=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\left(x^2+\frac{\alpha^2}{x^2}\right)}\mathrm{d}x$.

9 Din calculul integralei $F(t)=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\cdot\cos(tx)\,\mathrm{d}x$, să se obțină valoarea integralei $I=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\cdot\cos(\pi x)\,\mathrm{d}x$.

10 Ştiind că $\int_0^{\infty}\frac{\cos(ax)}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\cdot\mathrm{e}^{-|a|}$, să se calculeze

$$F(a)=\int_0^{\infty}\frac{x\cdot\sin(ax)}{\left(1+x^2\right)^2}\mathrm{d}x.$$

11 Să se găsească o relație între integralele $I_1 = \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^n}}$ și $I_2 = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^n}}$, stabilind mai întâi condiția pe care trebuie să o îndeplinească $n \in \mathbb{N}$, astfel ca I_1 și I_2 să fie convergente.

12 Să se calculeze $I = \int_0^1 \ln\left(\Gamma(x)\right) \mathrm{d}x$, unde $\Gamma(x)$ este funcția lui Euler.

MODULUL 6

INTEGRALA CURBILINIE

5.1 BREVIAR TEORETIC

Definiția 5.1

(i) Fie $I=[a,b]$ interval compact. O funcție continuă $d:I\to\mathbb{R}^3$ se numeşte drum.

(ii) Se numeşte imaginea drumului mulțimea

$$I(d)=\{d(t),t\in[a,b]\}=\{(f(t),g(t),h(t)),t\in[a,b]\}.$$

(iii) Dacă $d(a)=d(b)$, atunci drumul se numeşte închis.

(iv) Fie $d:I\to\mathbb{R}^3$, $d(t)=(f(t),g(t),h(t))$.

Drumul *d* se numeşte rectificabil dacă şi numai dacă funcțiile f,g,h sunt cu variație mărginită pe $[a,b]$.

Lungimea drumului *d*, dacă f,g,h au derivată integrabilă pe $[a,b]$, este dată de relația $\ell(d)=\int_a^b\sqrt{f'^2(t)+g'^2(t)+h'^2(t)}\,\mathrm{d}t$.

(v) Două drumuri $d:[a,b]\to\mathbb{R}^3$ şi $\delta:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^3$ se numesc echivalente dacă există o funcție $\omega:[a,b]\to[\alpha,\beta]$, astfel încât $\omega(a)=\alpha$; $\omega(b)=\beta$ şi $\forall\, t\in[a,b]$, $d(t)=(\delta\circ\omega)(t)$.

Relația astfel definită este o relație de echivalență.

(vi) Se numeşte curbă o clasă de drumuri echivalente. Se numeşte curbă închisă o curbă ce conține un drum închis, se numeşte curbă rectificabilă o curbă ce conține un drum rectificabil, se numeşte lungimea curbei lungimea comună a drumurilor care alcătuiesc curba şi se numeşte imaginea curbei imaginea drumurilor care aparțin curbei.

Definiția 5.2. Fie *C* o curbă rectificabilă în spațiu:

$$C:[a,b]\to\mathbb{R}^3,\ C=\begin{cases}x=f(t)\\ y=g(t) & t\in[a,b]\\ z=h(t)\end{cases}$$

şi fie $F:D\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$. (*D* un domeniu ce conține imaginea curbei *C*)

Fie $\ell(t)$ lungimea curbei *C*. Dacă integrala Stieltjes.

$$\int_a^b F(f(t),g(t),h(t))\mathrm{d}\ell(t)$$

există, atunci ea se notează $\int_C F(x,y,z)\mathrm{d}\ell$ şi se numeşte integrala curbilinie de primul tip a funcției *F* de-a lungul curbei *C*.

Observația 5.3

(i) Dacă funcțiile f, g, h sunt de clasa $C^1([a,b])$ şi dacă *F* este continuă pe *D*, atunci:

$$\int_C F(x,y,z)\mathrm{d}\ell = \int_a^b F(f(t),g(t),h(t))\sqrt{f'^2(t)+g'^2(t)+h'^2(t)}\,\mathrm{d}t.$$

(ii) Considerând un fir material de grosime neglijabilă care este imaginea unei curbe *C* şi dacă $\mu=\mu(x,y,z)$ este densitatea în punctul (x,y,z), atunci masa *M* şi coordonatele centrului de greutate x_G, y_G, z_G sunt date de formulele:

$$M=\int_C \mu(x,y,z)\mathrm{d}\ell,\quad x_G=\frac{1}{M}\int_C x\mu(x,y,z)\mathrm{d}\ell,$$

$$y_G=\frac{1}{M}\int_C y\mu(x,y,z)\mathrm{d}\ell,\quad z_G=\frac{1}{M}\int_C z\mu(x,y,z)\mathrm{d}\ell,$$

evident dacă integralele de mai sus există.

Definiția 5.4

(i) Fie $C=\{(f(t),g(t),h(t)), t\in[a,b]\}$ o curbă în spațiu; *D* un domeniu în spațiul euclidian $\mathbb{R}^3$ care conține imaginea curbei *C*; $P,Q,R: D\to\mathbb{R}^3$.

Dacă integralele Stieltjes

$$\int_a^b P(f(t),g(t),h(t))\mathrm{d}f(t);$$

$$\int_a^b Q(f(t),g(t),h(t))\mathrm{d}g(t);$$

$$\int_a^b R(f(t),g(t),h(t))\mathrm{d}h(t),$$

există atunci suma lor se notează

$$\int_C P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z$$

şi se numeşte integrala curbilinie de tipul al doilea.

Dacă funcțiile P, Q, R sunt continue şi curba *C* rectificabilă, atunci integrala curbilinie de tipul al doilea există.

(ii) Din punct de vedere mecanic integrala

$$\int_C P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{dz}$$

reprezintă lucrul mecanic al forței vectoriale

$$\overline{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$$

al cărei punct de aplicație descrie curba *C*.

Proprietățile 5.5

(i) Dacă $P;Q;R: D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sunt funcții continue pe *D* şi dacă funcțiile $f,g,h:[a,b] \to \mathbb{R}$ sunt funcții de clasă $C^1([a,b])$, atunci integrala curbilinie de tipul al doilea există şi

$$\int_C P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{dz} =$$

$$= \int_a^b \left[P(f(t),g(t),h(t))f'(t) + Q(f(t),g(t),h(t)) \cdot g'(t) + R(f(t),g(t),h(t)) \cdot h'(t) \right] \mathrm{d}t.$$

(ii) Fie *C* o curbă în spațiu, *D* un domeniu care include imaginea lui *C* şi

$$P_1, Q_1, R_1, P_2, Q_2, R_2 : D \to \mathbb{R},\ \lambda_1 \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

Atunci, dacă există integralele

$$\int_C P_i(x,y,z)\mathrm{d}x + Q_i(x,y,z)\mathrm{d}y + R_i(x,y,z)\mathrm{dz},\ i = \overline{1,2},$$

are loc egalitatea

$$\int_C \sum_{i=1}^{2} \lambda_i P_i(x,y,z)\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{2} \lambda_i Q_i(x,y,z)\mathrm{d}y + \sum_{i=1}^{2} \lambda_i R_i(x,y,z)\mathrm{dz} =$$

$$= \sum_{i=1}^{2} \lambda_i \int_C P_i(x,y,z)\mathrm{d}x + Q_i(x,y,z)\mathrm{d}y + R_i(x,y,z)\mathrm{dz}.$$

(ii) Fie C_1, C_2 două curbe juxtapozabile şi $C = C_1 \cup C_2$.

Fie $P,Q,R: D \to \mathbb{R}$, unde *D* este un domeniu ce conține imaginea curbei *C*. Atunci, dacă integralele există, are loc egalitatea:

$$\int_{C=C_1 \cup C_2} P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{dz} =$$

$$= \sum_{i=1}^{2} \int_{C_i} P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{dz}.$$

Definiția 5.6

(i) Fie $P,Q,R : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ funcții continue. Dacă există $F : D \to \mathbb{R}$, diferențiabilă pe D astfel încât

$$\mathrm{d}F(x,y,z) = P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z,\ \forall (x,y,z) \in D,$$

atunci spunem că expresia

$$P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z$$

este o diferențială totală pe D.

(ii) Spunem că integrala curbilinie nu depinde de drum dacă pentru orice curbe C_1 şi C_2 având acelaşi punct inițial şi acelaşi punct final

$$\int_{C_1} P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z =$$

$$= \int_{C_2} P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z =$$

$$\stackrel{\text{not}}{=} \int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z,$$

unde (x_1,y_1,z_1) şi (x_2,y_2,z_2) sunt extremitățile inițială şi finală ale curbei $C_i,\ i = \overline{1,2}$.

Proprietățile 5.7

(i) Fie $P,Q,R : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ funcții continue.

Condiția necesară şi suficientă pentru ca integrala

$$\int_{C} P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z$$

să nu depindă de drum este ca expresia

$$P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z$$

să fie o diferențială totală pe D.

În aceste condiții o funcție F cu proprietatea

$$\mathrm{d}F = P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z$$

este dată de relația

$$F(\overline{x},\overline{y},\overline{z}) = \int_{(\overline{x}_0,\overline{y}_0,\overline{z}_0)}^{(\overline{x},\overline{y},\overline{z})} P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z,$$

unde (x_0,y_0,z_0) este un punct fixat în D, iar $(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$ este un punct oarecare în D.

(ii) Integrala unei diferențiale exacte pe o curbă închisă este nulă.

(iii) Fie $P,Q,R:D\to\mathbb{R}$ funcții continue ce admit derivate parțiale după orice direcție. Atunci

$$P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z$$

este o diferențială exactă dacă şi numai dacă pentru orice $(x,y,z)\in D$ au loc egalitățile $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$; $\dfrac{\partial Q}{\partial z}=\dfrac{\partial R}{\partial y}$ şi $\dfrac{\partial R}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial z}$.

5.2 PROBLEME REZOLVATE

1 Să se arate că următoarele drumuri au aceeaşi imagine. Sunt drumuri echivalente cu aceeaşi orientare?

$$f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2,\ f(t)=(a\cos t, b\sin t);$$

$$g:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2,\ g(t)=(a\cos t, -b\sin t).$$

Rezolvare. Dacă notăm cu $x=a\cos t$ şi $y=b\sin t$, prin eliminarea lui t, rezultă imaginea drumului f ca fiind elipsa

$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b^2}-1=0.$$

Analog, dacă notăm cu $x=a\cos t,\ y=-b\sin t$, rezultă că $\operatorname{Im} g$ este aceeaşi elipsă. Prima parametrizare parcurge elipsa în sens trigonometric direct, iar a doua, în sens invers. Rezultă că f şi g nu sunt echivalente cu aceeaşi orientare.

2 Să se arate că următoarele drumuri sunt echivalente cu aceeaşi orientare:

$$f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^3,\ f(t)=(a\cos t, a\sin t, b);$$

$$g:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^3,\ g(t)=(a\cos 2t, a\sin 2t, b).$$

Rezolvare. Dacă notăm cu

$$x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = b \ \text{ sau } \ x = a\cos 2t,\ y = a\sin 2t,\ z = b,$$

obținem că imaginea în $\mathbb{R}^3$ a lui f şi g este cercul cu centrul pe axa Oz, de rază a situat în planul $z = b$. Observăm că aplicația

$$\varphi : [0, 2\pi] \to [0, \pi],\ \varphi(t) = \frac{t}{2}$$

este bijectivă, continuă, strict crescătoare, iar

$$f(t) = (g \circ \varphi)(t),\ t \in [0, 2\pi].$$

Rezultă că f şi g sunt echivalente cu aceeaşi orientare.

3 Fie $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$

$$\gamma(t) = \begin{cases} \left(t\cos\frac{\pi}{2t}, t \right),\ t \in (0,1]; \\ (0,0),\ t = 0. \end{cases}$$

Să se arate că γ nu este rectificabil.

Rezolvare. Fie $x(t) = \begin{cases} t\cos\frac{\pi}{2t},\ t \in (0,1] \\ 0,\ t = 0 \end{cases}$ şi $y(t) = \begin{cases} t,\ t \in (0,1]; \\ 0,\ t = 0. \end{cases}$

Fie $\Delta = \left(0 < \frac{1}{2n-1} < \frac{1}{2n-2} < \ldots < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < 1 \right)$.

Avem

$$\sum_{i=1}^{2n-2} \sqrt{\left[x(t_{i+1}) - x(t_i) \right]^2 + \left[y(t_{i+1}) - y(t_i) \right]^2} =$$

$$= \sum_{i=1}^{2n-2} \sqrt{\left(t_{i+1}\cos\frac{\pi}{2t_{i+1}} - t_i\cos\frac{\pi}{2t_i} \right)^2 + (t_{i+1} - t_i)^2} =$$

$$= \sum_{i=1}^{2n-2} \sqrt{\left(\frac{1}{i+1}\cos\frac{\pi}{2}(i+1) - \frac{1}{i}\cos\frac{\pi}{2}i \right)^2 + \left(\frac{1}{i+1} - \frac{1}{i} \right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2 3^2}} + \sqrt{\frac{1}{4^2} + \frac{1}{3^2 4^2}} + \ldots +$$

$$+ \sqrt{\frac{1}{(2n-2)^2} + \frac{1}{(2n-2)^2} \cdot \frac{1}{(2n-1)^2}} > 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n-2} \right) = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1} \to \infty.$$

Rezultă că γ nu este rectificabil.

4 Să se calculeze lungimea cicloidei

$$\gamma : \begin{cases} x = t - \sin t; \\ y = 1 - \cos t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi].$$

Rezolvare.

$$\ell(\lambda) = \int_\gamma \mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = 8.$$

5 Să se calculeze lungimea cardioidei

$$\gamma : \begin{cases} x = R(2\cos t - \cos 2t); \\ y = R(2\sin t - \sin 2t), \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi],\ R > 0.$$

Rezolvare.

$$\ell(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2(-2\sin t + 2\cos 2t)^2 + R^2(2\cos t - 2\cos 2t)^2}\,\mathrm{d}t = 16R.$$

6 Să se calculeze lungimea curbei a cărei imagine este

$$\Gamma = \left\{ (x, y) \,\middle|\, \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1 \right\}.$$

Rezolvare. Γ este imaginea curbei cu reprezentarea parametrică

$$\gamma : \begin{cases} x = a\cos^3 t; \\ y = b\sin^3 t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$\ell(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{3a^2\cos^2 t \sin t + 3b^2 \sin^2 t \cos t}\,\mathrm{d}t = \frac{4\left(a^2 + ab + b^2\right)}{a + b}.$$

7 Să se calculeze lungimea curbei a cărei imagine este

$$\Gamma = \left\{ (x, y, z) \,\middle|\, x = t\cos t,\ y = t\sin t,\ z = t,\ t \in [0, 1] \right\}.$$

Rezolvare.

$$\ell(\gamma)=\int_0^1\sqrt{\left[x'(t)\right]^2+\left[y'(t)\right]^2+\left[z'(t)\right]^2}\,\mathrm{d}t=$$
$$=\int_0^1\sqrt{(\cos t-t\sin t)^2+(\sin t+t\cos t)^2+1}\,\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{3}}{2}+\ln\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

8 Să se calculeze integrala curbilinie de primul tip $\int\limits_\gamma xy\,\mathrm{d}s$, unde

$$\gamma:\begin{cases}x=\cos^2 t;\\ y=\cos t,\end{cases}\quad t\in[0,\pi].$$

Rezolvare.

$$\int\limits_\gamma xy\,\mathrm{d}s=\int_0^\pi\cos^3 t\sin t\sqrt{4\cos^2 t+1}\,\mathrm{d}t=0.$$

9 Să se calculeze

$$\int\limits_\gamma x\,\mathrm{d}s,$$

unde imaginea lui γ este $\Gamma=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|=1\}$.

Rezolvare. $\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2\cup\Gamma_3\cup\Gamma_4$ cu parametrizările

$$\gamma_1:\begin{cases}x=1-t;\\ y=t,\end{cases}\quad t\in[0,1];$$

$$\gamma_2:\begin{cases}x=-t;\\ y=1-t,\end{cases}\quad t\in[0,1];$$

$$\gamma_3:\begin{cases}x=t;\\ y=-1-t,\end{cases}\quad t\in[-1,0];$$

$$\gamma_4:\begin{cases}x=t;\\ y=t-1,\end{cases}\quad t\in[0,1].$$

$$\int_{\gamma} x\,\mathrm{d}s = \int_{\gamma_1} x\,\mathrm{d}s + \int_{\gamma_2} x\,\mathrm{d}s + \int_{\gamma_3} x\,\mathrm{d}s + \int_{\gamma_4} x\,\mathrm{d}s =$$

$$= \int_0^1 (1-t)\sqrt{(-1)^2 + 1^2}\,\mathrm{d}t + \int_0^1 -t\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2}\,\mathrm{d}t +$$

$$+ \int_{-1}^0 t\sqrt{1^2 + (-1)^2}\,\mathrm{d}t + \int_0^1 t\sqrt{1^2 + 1^2}\,\mathrm{d}t = 0.$$

10 Să se calculeze

$$\int_{\gamma} \left(x^2 - y^2\right)\mathrm{d}s,$$

unde γ are ca imagine mulțimea

$$\Gamma = \left\{(x,y,z) \,\middle|\, x^2 + y^2 = a^2,\ x + y + z = 0\right\}.$$

Rezolvare. γ are parametrizarea

$$\gamma : \begin{cases} x = a\cos t; \\ y = a\sin t; \\ z = -a(\sin t + \cos t), \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

$$\int_{\gamma} \left(x^2 - y^2\right)\mathrm{d}s =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(a^2\cos^2 t - a^2\sin^2 t\right)\sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + a^2(\cos t - \sin t)^2}\,\mathrm{d}t = 0.$$

11 Să se calculeze integrala curbilinie de al doilea tip:

$$\int_{\gamma} xy\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}y,$$

unde

$$\gamma : \begin{cases} x = 9\cos t; \\ y = 9\sin t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi].$$

Rezolvare.

$$\int_{\gamma} xy\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} \left[81\cos t\sin t(-9\sin t) + 9\cos t\right]\mathrm{d}t = -729\frac{\sin^3 t}{3}\bigg|_0^{2\pi} + 9\sin t\big|_0^{2\pi} = 0.$$

12 Să se calculeze:

$$I = \int_{\gamma} \left(y^2 + 2xz\right)\mathrm{d}x + 2y\left(x+z\right)\mathrm{d}y + \left(x^2 + y^2\right)\mathrm{dz},$$

unde

$$\gamma : \begin{cases} x = a\cos t; \\ y = b\sin t; \quad t \in [0, 2\pi]. \\ z = ct, \end{cases}$$

Rezolvare.

$$I = \int_0^{2\pi} \Big[\left(b^2 \sin^2 t + 2act\cos t\right)\left(-a\sin t\right) +$$

$$+ 2b\sin t\left(a\cos t + ct\right)\cdot\left(b\cos t\right) + \left(a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t\right)\cdot c\Big]\mathrm{d}t =$$

$$= 2\pi a^2 c.$$

13 Să se calculeze:

$$I = \int_{(-1,1)}^{(2,-1)} x(1+x)\mathrm{d}x - y(1+y)\mathrm{d}y,$$

verificându-se că nu depinde de drumul care uneşte punctele $(-1,1)$ şi $(2,-1)$.

Rezolvare. Fie $P(x,y) = x(1+x)$ şi $Q(x,y) = -y(1+y)$.

Avem $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$. Rezultă că integrala nu depinde de drumul care uneşte punctele $(-1,1)$ şi $(2,-1)$. Fie γ drumul care uneşte cele două puncte:

$$\gamma : \begin{cases} x = 3t - 1; \\ y = -2t + 1, \end{cases} \quad t \in [0,1].$$

Atunci:

$$I = \int_0^1 \left[9t(3t-1) + 2(-2t+1)(-2t+2)\right]\mathrm{d}t = \frac{31}{6}.$$

14 Să se determine funcția $U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dacă

$$\mathrm{d}U = \left(2x^2 + 2xy - y^2\right)\mathrm{d}x + \left(x^2 - 2xy - y^2\right)\mathrm{d}y.$$

Rezolvare. Fie $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

$$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} \left(2t^2 + 2ty_0 - y_0^2\right) \mathrm{d}t + \int_{y_0}^{y} \left(x^2 - 2xt - t^2\right) \mathrm{d}t =$$

$$= 2\frac{t^3}{3}\Bigg|_{x_0}^{x} + \frac{t^2}{2} y_0\Bigg|_{x_0}^{x} - y_0^2 t\Big|_{x_0}^{x} + x^2 t\Big|_{y_0}^{y} - x\frac{t^2}{2}\Bigg|_{y_0}^{y} - \frac{t^3}{3}\Bigg|_{y_0}^{y} =$$

$$= \frac{x-y}{3}\left(x^2 + 4xy + y^2\right) + C,$$

unde C este o constantă reală.

15 Să se calculeze lucrul mecanic efectuat de forța

$$F(x,y,z) = (2x + y + z,\ x + 2y + z,\ x + y + 2z)$$

când punctul ei de aplicație descrie arcul

$$\overset{\frown}{AB} = \left\{(x,y,z) \,\middle|\, x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = bt,\ t \in [0,\pi]\right\}.$$

Rezolvare. Lucrul mecanic $\mathcal{L}$ este

$$\mathcal{L} = \int_{\overset{\frown}{AB}} (2x + y + z)\mathrm{d}x + (x + 2y + z)\mathrm{d}y + (x + z + 2z)\mathrm{d}z =$$

$$= \int_0^{\pi} \Big[(2a\cos t + a\sin t + bt)\cdot(-a\sin t) + (a\cos t + 2a\sin t + bt)(a\cos t) +$$

$$+ (a\cos t + a\sin t + 2bt)\cdot b\Big]\mathrm{d}t = b\pi(b\pi - 2a).$$

Să se calculeze următoarele integrale curbilinii:

16 $\displaystyle\int_C y\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}\ell$, dacă $C = \begin{cases} x = \ln\left(1+t^2\right); \\ y = 2\operatorname{arctg} t - t + 1, \end{cases}$ $t \in [0,1]$.

Rezolvare.

$$\int_C y\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}\ell = \int_0^1 (2\operatorname{arctg} t - t + 1)\mathrm{e}^{-\ln\left(1+t^2\right)} \cdot \sqrt{\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2 + \left(\frac{2}{1+t^2} - 1\right)^2}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^1 (2\operatorname{arctg} t - t + 1)\cdot\frac{1}{t^2+1}\cdot 1\mathrm{d}t = \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}.$$

17 $\int_C |xy|\,\mathrm{d}\ell$, dacă $C=\begin{cases} x=a\cos t; \\ y=b\sin t, \end{cases}$ $t\in[0,4\pi]$, $a,b>0$.

Rezolvare.

$$\int_C |xy|\,\mathrm{d}\ell = 2\int_0^{\pi/2} ab\sin t\cos t\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\ \mathrm{d}t -$$

$$-2\int_{\pi/2}^{\pi} ab\sin t\cos t\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\ \mathrm{d}t +$$

$$+2\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} ab\sin t\cos t\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\ \mathrm{d}t -$$

$$-2\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} ab\sin t\cos t\sqrt{a^2\sin^2 + b^2\cos^2 t}\ \mathrm{d}t.$$

Făcând substituția $\sin^2 t = u$, va rezulta că

$$\int_C |xy|\,\mathrm{d}\ell = \frac{8ab\left(a^2+ab+b^2\right)}{3(a+b)}.$$

18 $\int_C y\,\mathrm{d}\ell$, dacă $C=\begin{cases} x=R(t-\sin t); \\ y=R(1-\cos t), \end{cases}$ $t\in[0,2\pi]$, $R>0$.

Rezolvare.

$$\int_C y\,\mathrm{d}\ell = \int_0^{2\pi} R(1-\cos t)\sqrt{R^2(1-\cos t)^2+R^2\sin^2 t}\ \mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^{2\pi} R^2(1-\cos t)\sqrt{2-2\cos t}\ \mathrm{d}t =$$

$$= R^2\sqrt{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^{3/2}\mathrm{d}t = 4R^2\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{t}{2}\mathrm{d}t = \frac{32R^2}{3}.$$

19 $\int_C (x+y)\,\mathrm{d}\ell$, dacă $C=\begin{cases} x=a\cos t; \\ y=b\sin t, \end{cases}$ $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $a,b>0$.

Rezolvare.

$$\int_C (x+y)\,\mathrm{d}\ell = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a\cos t + b\sin t)\sqrt{a^2\sin^2 + b^2\cos^2}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos t\sqrt{\left(a^2-b^2\right)\sin^2 t + b^2}\,\mathrm{d}t + \int_0^{\frac{\pi}{2}} b\sin t\sqrt{a^2 + \left(b^2-a^2\right)\cos^2 t}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^1 a\sqrt{\left(a^2-b^2\right)u^2 + b^2}\,\mathrm{d}u + \int_0^1 b\sqrt{\left(b^2-a^2\right)u^2 + a^2}\,\mathrm{d}u =$$

$$= \frac{a^2+b^2}{2} + \frac{ab}{2\sqrt{b^2-a^2}}\left(b\arccos\frac{b}{a} + a\ln\frac{b+\sqrt{b^2-a^2}}{a}\right).$$

20 $\displaystyle\int_C xy\,\mathrm{d}\ell$, dacă $C:\begin{cases} x=|t|; \\ y=\sqrt{1-t^2}, \end{cases}$ $t\in[-1,1]$.

Rezolvare.

$$\int_C xy\,\mathrm{d}\ell = \int_{-1}^0 -t\sqrt{1-t^2}\cdot\sqrt{1+\frac{t^2}{1-t^2}}\,\mathrm{d}t +$$

$$+\int_0^1 t\sqrt{1-t^2}\sqrt{1+\frac{t^2}{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^0 -t\mathrm{d}t + \int_0^1 t\mathrm{d}t = 1.$$

21 $\displaystyle\int_C (x+y+z)\,\mathrm{d}\ell$, dacă $C:\begin{cases} x=a\cos t; \\ y=a\sin t; \\ z=bt, \end{cases}$ $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $a,b>0$.

Rezolvare.

$$\int_C (x+y+z)\,\mathrm{d}\ell = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a\cos t + a\sin t + bt)\cdot\sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (a\cos t + a\sin t + bt)\,\mathrm{d}t = \sqrt{a^2+b^2}\left(2a + \frac{b\pi^2}{8}\right).$$

22 $\int_C (x^2+y^2)\ln z\,\mathrm{d}\ell$, dacă $C:\begin{cases} x=\mathrm{e}^t\cos t; \\ y=\mathrm{e}^t\sin t; \quad t\in[0,1]. \\ z=\mathrm{e}^t, \end{cases}$

$$\int_C (x^2+y^2)\ln z\,\mathrm{d}\ell = \int_0^1 \mathrm{e}^{2t}\, t\cdot \mathrm{e}^t\sqrt{3}\,\mathrm{d}t = \sqrt{3}\int_0^1 t\,\mathrm{e}^{3t}\,\mathrm{d}t = \sqrt{3}\,\frac{2\,\mathrm{e}^3+1}{9}$$

$$\mathrm{d}\ell = \sqrt{\mathrm{e}^{2t}(\cos t-\sin t)^2+\mathrm{e}^{2t}(\sin t+\cos t)^2+\mathrm{e}^{2t}}\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^t\sqrt{3}\,\mathrm{d}t.$$

23 Să se calculeze masa firului material care este imaginea drumului $C:\begin{cases} x=t; \\ y=\dfrac{t^2}{2}, \end{cases}$ $t\in[0,1]$ şi are densitatea liniară $\rho(x,y)=1+x$.

Rezolvare.

$$M = \int_C (1+x)\,\mathrm{d}\ell = \int_0^1 (1+t)\cdot\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^1 \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t + \int_0^1 t\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)+\frac{7\sqrt{2}-2}{6}.$$

24 Să se calculeze masa firului material care este imaginea drumului $C:\begin{cases} x=4t^5; \\ y=\sqrt{15}\,t^4; \quad t\in[-1,1] \\ z=2t^3, \end{cases}$ şi are densitatea liniară $\rho(x,y,z)=\left|\dfrac{z}{2}\right|$.

Rezolvare.

$$M = \int_C \left|\frac{z}{2}\right|\mathrm{d}\ell = \int_{-1}^1 \left|t^3\right|\cdot\sqrt{\left(20t^4\right)^2+\left(4\cdot\sqrt{15}t^3\right)^2+\left(6t^2\right)^2}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_{-1}^1 \left|t^3\right|\cdot\sqrt{400t^8+240t^6+36t^4}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^1 t^3\sqrt{400t^8+240t^6+36t^4}\,\mathrm{d}t =$$

$$= 4\int_0^1 t^5\sqrt{100t^4+60t^2+9}\,\mathrm{d}t = 4\int_0^1 t^5\left(10t^2+3\right)\mathrm{d}t = 5+2=7.$$

25 Să se calculeze $\int\limits_C x^2y^2z^2\mathrm{d}\ell$, unde C este curba simplă închisă, rectificabilă în spațiu care are ca imagine cercul situat la intersecția sferei $x^2+y^2+z^2=1$ cu planul $x+y=0$ şi care are ambele capete în $\mathrm{A}(0,0,1)$.

Rezolvare. O parametrizare a curbei C poate fi

$$\begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta; \\ y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta; \qquad \theta\in\left[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{5\pi}{2}\right] \\ z=\sin\theta, \end{cases}$$

şi în acest caz

$$\int\limits_C x^2y^2z^2\,\mathrm{d}\ell=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}}\frac{1}{4}\cos^4\theta\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}}\frac{1}{4}\left(\cos^4\theta-\cos^6\theta\right)\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{32},$$

unde:

$$\mathrm{d}\ell=\sqrt{\frac{2}{4}\sin^2\theta+\frac{2}{4}\sin^2\theta+\cos^2\theta}\cdot\mathrm{d}\theta=\mathrm{d}\theta.$$

Să se calculeze integralele:

26 $\int\limits_C y^2\mathrm{d}x-x^2\mathrm{d}y$, dacă $C:\begin{cases} x=\cos t; \\ y=\sin t. \end{cases}\quad t\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right].$

Rezolvare.

$$\int\limits_C y^2\mathrm{d}x-x^2\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^2 t(-\sin t)-\cos^2 t\cos t\right)\mathrm{d}t=$$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^3 t+\cos^3 t\right)\mathrm{d}t=-\frac{4}{3}.$$

27 $\int\limits_C y\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x+x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}y$, dacă $C:\begin{cases} x=\ln\left(1+t^2\right); \\ y=t-2\operatorname{arctg}t, \end{cases}\quad t\in[-1,1].$

Rezolvare.

$$\int_C y\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x + x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1}\left[(t-2\operatorname{arctg}t)\cdot 1 + \ln\left(1+t^2\right)\left(1+t^2\right)\left(1-\frac{2}{1+t^2}\right)\right]\mathrm{d}t =$$

$$= \int_{-1}^{1}\left[t - 2\operatorname{arctg}t + \left(1+t^2\right)\ln\left(1+t^2\right) - 2\ln\left(1+t^2\right)\right]\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{92-30\pi-12\ln 2}{9}.$$

28 $\displaystyle\int_C y\,\mathrm{d}x + xy\,\mathrm{d}y$, dacă $C:\begin{cases} x = t^2; \\ y = \sqrt[3]{1-t^2}, \end{cases}$ $t\in[0,1]$.

Rezolvare.

$$\int_C y\,\mathrm{d}x + xy\,\mathrm{d}y = \int_0^1\left[\sqrt[3]{1-t^2}\cdot 2t + t^2\cdot\sqrt[3]{1-t^2}\cdot\frac{-2t}{\sqrt[3]{\left(1-t^2\right)^2}}\right]\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^1\left(2t\cdot\sqrt[3]{1-t^2} - \frac{2t^3}{\sqrt[3]{1-t^2}}\right)\mathrm{d}t = \frac{9}{20}.$$

29 $\displaystyle\int_C \left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x - \left(x^2-y^2\right)\mathrm{d}y$, dacă $C:\begin{cases} x = \sqrt{t}; \\ y = \sqrt{1-t}, \end{cases}$ $t\in[0,1]$.

Rezolvare.

$$\int_C \left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x - \left(x^2-y^2\right)\mathrm{d}y =$$

$$= \int_0^1\left[(t+1-t)\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}} + (t-1+t)\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-t}}\right]\mathrm{d}t = \int_0^1\left(\frac{1}{2\sqrt{t}} - \frac{1}{2\sqrt{1-t}}\right)\mathrm{d}t = \frac{4}{3}.$$

30 Să se calculeze integrala

$$\int_C \frac{y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y}{9x^2+4y^2+4y},$$

unde C este curba simplă, închisă şi orientată pozitiv care are drept imagine în plan elipsa $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ şi ambele extremităţi în punctul $(2,0)$.

Rezolvare. O parametrizare a curbei C poate fi

$$C:\begin{cases} x = 2\cos\theta; \\ y = 3\sin\theta, \end{cases} \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

$$\int_C \frac{y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y}{9x^2 + 4y^2 + 4y} =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{3\sin\theta \cdot (-2\sin\theta)}{36\cos^2\theta + 36\sin^2\theta + 12\sin\theta} - \frac{2\cos\theta(3\cos\theta)}{36 + 12\sin\theta} \right] \mathrm{d}\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{-6}{36 + 12\sin\theta} \mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \frac{-1}{6 + 2\sin\theta} \mathrm{d}\theta = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

31 Să se calculeze integrala $\int_C x^2 y\,\mathrm{d}x + y^2\mathrm{d}y$, unde C este curba simplă închisă, orientată pozitiv, care are drept imagine semicercul $x^2 + y^2 = 4,\ (y \geq x)$ reunit cu diametrul care îl determină şi ambele extremităţi în origine.

Rezolvare. Curba C poate fi considerată ca o juxtapunere de drumuri.

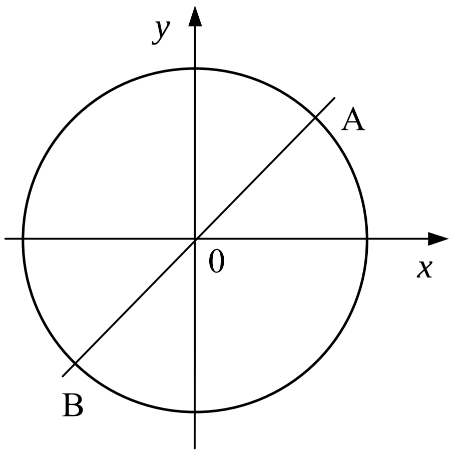


Fig. 5.1

$$C = OA \cup \overset{\frown}{AB} \cup BO$$

$$\mathrm{OA}:\begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases} \quad t \in \left[0, \sqrt{2}\right] \qquad \mathrm{AB}:\begin{cases} x = 2\cos\theta \\ y = 2\sin\theta \end{cases} \quad \theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$$

$$\mathrm{BO}:\begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases} \quad t \in \left[-\sqrt{2}, 0\right]$$

$$\int_C x^2 y\,dx + y^2 dy =$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}} \left(t^3 + t^2\right) dt + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \left[-16\cos^2\theta\sin^2\theta + 8\sin^2\theta\cos\theta\right] d\theta +$$

$$+ \int_{-\sqrt{2}}^{0} \left(t^3 + t^2\right) dt = -2\pi.$$

32 Să se calculeze integrala $\int_C (a+y)dx + (a+x)dy$, unde C este curba simplă care are drept imagine semicercul $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ $(y \geq 0)$ reunit cu semicercul $x^2 + y^2 + 2ax = 0$ $(y \geq 0)$ şi extremitatea iniţială în punctul $(2a,0)$ $a > 0$.

Rezolvare. Curba C poate fi considerată ca o reuniune $C = C_1 \cup C_2$

$$C_1 = \begin{cases} x = a + a\cos\theta \\ y = a\sin\theta \end{cases} \quad \theta \in [0,\pi]$$

$$C_2 = \begin{cases} x = -a + a\cos\theta \\ y = a\sin\theta \end{cases} \quad \theta \in [0,\pi]$$

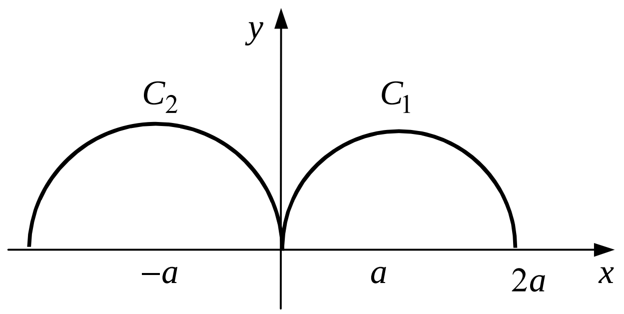


Fig. 5.2

$$\int_C (a+y)dx + (a+x)dy = \int_0^{\pi} \left[a(1+\sin\theta)(-a\sin\theta) + (2a + a\cos\theta)(a\cos\theta)\right] d\theta +$$

$$+ \int_0^{\pi} \left[a(1+\sin\theta)(-a\sin\theta) + a\cos\theta a\cos\theta\right] d\theta =$$

$$= -2a^2 \int_0^{\pi} \left(\sin\theta + \sin^2\theta\right) d\theta + 2a^2 \int_0^{\pi} \left(\cos\theta + \cos^2\theta\right) d\theta = -4a^2.$$

33 Să se calculeze integrala

$$\int_C y^2\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}y + x^2\mathrm{d}z\,,$$

dacă C este curba lui Viviani obținută prin intersecția suprafețelor

$$x^2+y^2+z^2=a^2 \quad \text{şi} \quad x^2+y^2-ax=0,\ a>0,\ z>0.$$

Rezolvare. O parametrizare a curbei C se obține folosind coordonatele cilindrice $x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta,\ z=z$. Parametrizarea cilindrului impune $\rho^2-a\rho\cos\theta=0\Rightarrow\rho=a\cos\theta$.

Curba fiind pe sferă vom obține

$$a^2\cos^4\theta+a^2\cos^2\theta\sin^2\theta+z^2=a^2,$$

de unde rezultă $z=a\sin\theta$.

În aceste condiții:

$$\int_C y^2\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}y+x^2\mathrm{d}z=a^3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^5\theta+\sin^2\theta\cos 2\theta+\frac{-\sin^3 2\theta}{4}\right)\mathrm{d}\theta=-\frac{3\pi a^3}{4}.$$

Să se calculeze următoarele integrale verificând independența lor de drum:

34 $\int_{(0,2)}^{(2,0)} y^2\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x+2y\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}y.$

Rezolvare.

$$P(x,y)=y^2\,\mathrm{e}^x;$$

$$Q(x,y)=2y\mathrm{e}^x.$$

Deoarece $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, rezultă că $P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ este o diferențială exactă. Considerăm drumul cu parametrizarea

$$\begin{cases} x=t; \\ y=2-t, \end{cases} \quad t\in[0,2]$$

şi integrala devine

$$\int_0^2 (2-t)^2\,\mathrm{e}^t-2(2-t)\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t=\int_0^2\left(t^2-2t\right)\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t=-4.$$

35 $\int_{(-1,3,1)}^{(2,6,3)} \frac{y}{z}\mathrm{d}x+\frac{x}{z}\mathrm{d}y-\frac{xy}{z^2}\mathrm{d}z$.

Rezolvare.

Fie $P(x,y,z)=\frac{y}{z}$; $Q(x,y,z)=\frac{x}{z}$; $R(x,y,z)=-\frac{xy}{z^2}$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{1}{z}=\frac{\partial Q}{\partial x};\ \frac{\partial Q}{\partial z}=-\frac{x}{z^2}=\frac{\partial R}{\partial y};\ \frac{\partial R}{\partial x}=-\frac{y}{z^2}=\frac{\partial P}{\partial z}.$$

Rezultă deci că $P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$ este o diferențială totală exactă.

Fie $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ o funcție astfel încât:

$$\mathrm{d}F=P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{y}{z}\Rightarrow F(x,y,z)=\frac{xy}{z}+g(y,z)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{x}{z}\quad \frac{x}{z}=\frac{x}{z}+\frac{\partial g}{\partial y}\Rightarrow\frac{\partial g}{\partial y}=0\Rightarrow F(x,y,z)=\frac{xy}{z}+h(z)$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}=-\frac{xy}{z^2}\quad \frac{-xy}{z^2}=-\frac{xy}{z^2}+h'(z)\Rightarrow h'(z)=0\Rightarrow F(x,y,z)=\frac{xy}{z}+\mathrm{C}.$$

În aceste condiții:

$$\int_{(-1,3,1)}^{(2,6,3)} \frac{y}{z}\mathrm{d}x+\frac{x}{z}\mathrm{d}y-\frac{xy}{z^2}\mathrm{d}z=F(2,6,3)-F(-1,3,1)=4+3=7.$$

36 Să se determine o funcție $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ astfel încât $\mathrm{d}F=\omega$ dacă

$$\omega=y(y+2z)\mathrm{d}x+2x(y+z)\mathrm{d}y+2xy\,\mathrm{d}z.$$

Rezolvare. Fie

$$P(x,y,z)=y(y+2z),\ Q(x,y,z)=2x(y+z),\ R(x,y,z)=2xy$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2y+2z=\frac{\partial Q}{\partial x},\quad \frac{\partial Q}{\partial z}=2x=\frac{\partial R}{\partial y},\quad \frac{\partial R}{\partial x}=2y=\frac{\partial P}{\partial z}$$

$P,Q,R:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ de clasă $\mathrm{C}^1\left(\mathbb{R}^3\right)$.

Rezultă că expresia $P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$ este diferențială totală exactă:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=y^2+2yz\Rightarrow F(x,y,z)=xy^2+2xyz+g(y,z)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=2xy+2xz;\quad 2xy+2xz=2xy+2xz+\frac{\partial g}{\partial y}\Rightarrow\frac{\partial g}{\partial y}=0$$

$$\Rightarrow F(x,y,z) = xy^2 + 2xyz + h(z)$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 2xy; \quad 2xy = 2xy + h'(z) \Rightarrow h'(z) = 0.$$

Deci, funcția $F:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ căutată va fi $F(x,y,z) = xy^2 + 2xyz + C$.

37 Fie curba Γ de ecuație $|x|+|y|=1,\ x\in[-1,1]$, şi funcțiile $P,Q:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

$$P(x,y) = (x+y)^2;$$
$$Q(x,y) = -\left(x^2+y^2\right).$$

(i) Să se arate că integrala $\int_\gamma P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ depinde de drum, unde $\gamma\subset\mathbb{R}^2$ este o curbă arbitrară rectificabilă.

(ii) Să se arate că $\int_\Gamma \frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{|x|+|y|} = 0$ şi să se explice rezultatul. Generalizați.

(iii) Este adevărată afirmația: Pentru orice curbă $\gamma\subset\mathbb{R}^2$ simplă închisă şi rectificabilă există funcția $f_\gamma \in C^1\left(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}\right)$ constantă pe curba $\gamma\subset\mathbb{R}^2$, astfel încât:

$$\int_\gamma P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_\gamma f_\gamma\left(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y\right).$$

Justificați răspunsul.

(iv) Să se arate că $\int_{\overline{AB}} g\mathrm{d}x + g\mathrm{d}y = \int_{\overline{CD}} g\mathrm{d}x + g\mathrm{d}y = 0,\ \forall\, g\in C^1\left(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}\right)$, unde $\overline{AB}$ şi $\overline{CD}$ sunt reprezentate în figură.

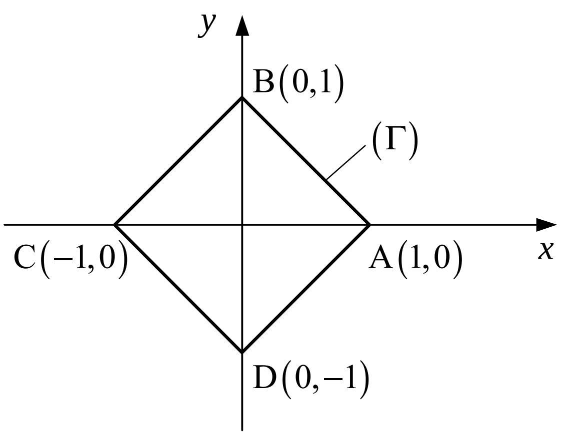


Fig. 5.3

(v) Să se determine funcția $f \in C^1(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ astfel ca:

$$\begin{cases} \int\limits_{\Gamma} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int\limits_{\Gamma} f \cdot \mathrm{d}x + f \cdot \mathrm{d}y; \\ f\big|_{\overline{DA}} = 1. \end{cases}$$

(iv) Folosind formula lui Green să se calculeze integrala

$$I = \int\limits_{\Gamma} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y .$$

Explicați rezultatul obținut.

Rezolvare.

(i) Integrala $\int\limits_{\gamma} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ este independentă de drum dacă şi numai dacă

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},\ \forall (x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2,\ \partial D = \gamma,\ P,Q \in C^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R});$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2(x+y) \neq -2x = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

(ii) Cum pe Γ avem $|x|+|y|=1 \Rightarrow \int\limits_{\Gamma} \frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{|x|+|y|} = \int\limits_{\Gamma} \mathrm{d}x + \mathrm{d}y = 0$.

Nu se poate folosi formula lui Green pentru integrala din partea stângă, deoarece funcția $\frac{1}{|x|+|y|}$ nu este de clasă C^1 pe $D \subset \mathbb{R}^2$, $\partial D = \Gamma$.

Generalizare. Pentru orice curbă $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ simplă închisă şi rectificabilă dată de ecuația $f(x,y) = C \Rightarrow$

$$\int\limits_{\Gamma} f(x,y)(\mathrm{d}x + \mathrm{d}y) = 0 .$$

(iii) Dacă prin absurd ar exista o funcție $f \in C^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ constantă pe γ astfel ca:

$$\int\limits_{\gamma} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int\limits_{\gamma} f(\mathrm{d}x + \mathrm{d}y),$$

atunci din (ii) $\Rightarrow \int\limits_{\gamma} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 0,\ \forall\, \gamma \subset \mathbb{R}^2$, simplă închisă şi rectificabilă $\Rightarrow \int\limits_{\gamma} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ ar fi independentă de drum. Contradicție cu (i).

(iv) $\overline{AB}=\begin{cases}x=1-u;\\ y=u,\end{cases}\quad u\in[0,1]$ şi $\overline{CD}=\begin{cases}x=-1+u;\\ y=-u,\end{cases}\quad u\in[0,1]$.

Din teorema de reducere a integralei curbilinii la o integrală Riemann deducem:

$$\begin{cases}\displaystyle\int_{\overline{AB}} g(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)=\int_0^1 g(1-u,u)(-1+1)\mathrm{d}u=0;\\ \displaystyle\int_{\overline{CD}} g(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)=\int_0^1 g(-1+u,-u)(1-1)\mathrm{d}u=0,\end{cases}\quad \forall\, g\in \mathrm{C}^1\left(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}\right).$$

(v) Condițiile sunt echivalente cu:

$$\begin{cases}\displaystyle\int_\Gamma (P-f)\mathrm{d}x+(Q-f)\mathrm{d}y=0;\\ f(u,-1+u)=1,\ \forall\, u\in[0,1]\end{cases}\quad\Rightarrow$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial y}(P-f)=\dfrac{\partial}{\partial x}(Q-f)\\ f(u,-1+u)=1,\ \forall\, x\in[0,1]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial y}=4x+2y\\ f(u,-1+u)=1,\ u\in[0,1]\end{cases}\Rightarrow\qquad \textbf{(5.1)}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{-1}=\frac{\mathrm{d}y}{1}=\frac{\mathrm{d}f}{4x+2y}\Rightarrow\begin{cases}x+y=C_1;\\ 2x^2-y^2+f=C_2,\end{cases}$$

soluția problemei Cauchy (**5.1**) fiind:

$$(x+y)^2+6(x+y)+5-4\left(2x^2-y^2+f(x,y)\right)=0.$$

(vi) Din formula lui Green deducem:

$$I=\int_\Gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_D(4x+2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

unde

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,\middle|\,|x|+|y|\le 1\right\}$$

$$I=-\iint_{\triangle BCD}(4x+2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{\triangle BDA}(4x+2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$

$$=-\int_1^0\left[\int_{-1-x}^{-1+x}(4x+2y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x-\int_0^1\left[\int_{1+x}^{1-x}(4x+2y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x=0.$$

5.3 TEMĂ DE CONTROL

1. Să se arate că drumul $\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^2$ este rectificabil

$$\gamma(t)=\begin{cases}\left(t^2\sin\frac{\pi}{t},t^2\right),\ t\in(0,1];\\(0,0),\ t=0.\end{cases}$$

Răspuns. $\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}$ este mărginită.

2. Să se calculeze lungimea drumului a cărui imagine este

$$\left\{(x,y)\middle|y^2=2px,\ x\in[0,a],\ y\geq 0,\ p>0\right\}.$$

Răspuns. $\sqrt{\frac{a(2a+p)}{2}}+\frac{p}{2}\ln\frac{\sqrt{2a}+\sqrt{2a+p}}{\sqrt{p}}.$

3. Să se găsească o parametrizare a lemniscatei

$$\left(x^2+y^2\right)^2=xy,\ x>0,\ y>0.$$

Răspuns. $x=\sqrt{\sin\theta\cos\theta}\cdot\cos\theta,\ y=\sqrt{\sin\theta\cos\theta}\cdot\sin\theta,\ \theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right].$

4. Să se afle lungimea elipsei de semiaxe $a,b,\ a>b$.

Răspuns. $2a\pi\left[1-\frac{e^2}{2^2}-\frac{1^2\cdot 3}{2^2\cdot 4^2}e^4-\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}e^6-\ldots\right]$, unde

$$e^2=\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right).$$

Să se calculeze integralele curbilinii de primul tip:

5. $\int_\gamma y\,ds$, unde $\gamma:\begin{cases}x=a\cos^3 t;\\y=a\sin^3 t,\end{cases}\quad t\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right].$

Răspuns. $\frac{3\sqrt{2}a^2}{40}.$

6. $\int\limits_{\gamma}\sqrt{y}\,\mathrm{d}s$, unde $\gamma:\begin{cases}x=2t;\\ y=t^2; \qquad t\in[0,1].\\ z=\dfrac{2}{3}t^3,\end{cases}$

Răspuns. $6\sqrt{3}-2+3\ln\dfrac{3+2\sqrt{3}}{3}$.

7. $\int\limits_{\gamma}\left(x^3+y^3\right)\mathrm{d}s$**,** unde

$$\operatorname{Im}\gamma=\left\{(x,y,z)\,\middle|\,x^2+y^2+z^2=a^2,\ x=y\ge 0,\ z\ge 0\right\}.$$

Răspuns. $x=y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a\cdot\sin t,\ z=a\cdot\cos t,\ t\in[0,\pi];\ \dfrac{2\sqrt{2}}{3}a^4$.

8. Să se calculeze masa firului material cu densitatea

$$\rho(x,y,z)=\left(x^2+y^2\right)\ln z$$

şi care are forma arcului de curbă:

$$\overset{\frown}{AB}:\begin{cases}x=\mathrm{e}^t\cos t;\\ y=\mathrm{e}^t\sin t; \quad t\in[0,1].\\ z=\mathrm{e}^t,\end{cases}$$

Răspuns. Masa$=\int\limits_{\overset{\frown}{AB}}\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}s=\dfrac{1+2a^3}{3\sqrt{3}}$.

Să se calculeze integralele curbilinii de al doilea tip:

9. $\int\limits_{\gamma}\dfrac{x+y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x+\dfrac{x-y}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$

$$\gamma:\begin{cases}x=a\cos t;\\ y=a\sin t,\end{cases}\quad t\in[0,2\pi].$$

Răspuns. -2π.

10. $\int_\gamma \frac{1}{|x|+|y|}\mathrm{d}x+\frac{1}{|x|+|y|}\mathrm{d}y$, unde γ este conturul pătratului cu vârfurile

$$\mathrm{A}(1,0);\ \mathrm{B}(0,1);\ \mathrm{C}(-1,0);\ \mathrm{D}(0,-1).$$

Răspuns. 0.

11. $\int_\gamma \left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x+xy\mathrm{d}y$, unde

$$\operatorname{Im}\gamma=\left\{(x,y)\,\middle|\, x^2-2x+y^2=0,\ y\geq 0,\ x\in[0,1]\right\}.$$

Răspuns. $\frac{7}{6}$.

Să se arate că următoarele integrale sunt independente de drum şi să se calculeze:

12. $\int_{(0,0)}^{(1,1)} 2xy\,\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y$.

Răspuns. 1.

13. $\int_{(1,0)}^{(6,8)} \frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ pe un drum care nu trece prin punctul $(0,0)$.

Răspuns. 9.

14. Să se determine funcția U dacă

$$\mathrm{d}U=\mathrm{e}^{x-y}\left[(1+x+y)\mathrm{d}x+(1-x-y)\mathrm{d}y\right].$$

Răspuns. $\mathrm{e}^{x-y}(x+y)+C$.

15. Să se calculeze

$$\int_{(1,1,1)}^{(2,3,2)} yz\mathrm{d}x+xz\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}z,$$

observând că integrala este independentă de drum.

Răspuns. Dacă notăm cu

$$P(x,y,z)=yz,\ Q(x,y,z)=xz,\ Q=(x,y,z)=xy,$$

atunci

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},\ \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y},\ \frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}.$$

Să se calculeze integralele curbilinii:

16. $\int\limits_C xyz\,\mathrm{d}\ell$, dacă $C=\begin{cases} x=t; \\ y=\frac{2}{3}\sqrt{2t^3}; \quad t\in[0,1]. \\ z=\frac{1}{2}t^2, \end{cases}$

Răspuns. $\frac{16\sqrt{2}}{143}$.

17. $\int\limits_C xy\,\mathrm{d}\ell$, dacă $C=\begin{cases} x=\mathrm{e}^{4t}; \\ y=\mathrm{e}^{2t}, \end{cases} \quad t\in\left[0,\frac{1}{2}\ln 2\right].$

Răspuns. $\frac{23\sqrt{17^3}-25\sqrt{5}}{120}$.

18. $\int\limits_C xy\,\mathrm{d}\ell$, dacă $C=\begin{cases} x=a(\cos t+t\sin t); \\ y=a(\sin t-t\cos t), \end{cases} \quad t\in[-\pi,\pi],\ a>0.$

Răspuns. 0.

19. $\int\limits_C \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\ell$, dacă $C=\begin{cases} x=(1+\cos t)\cos t; \\ y=(1+\cos t)\sin t, \end{cases} \quad t\in[-\pi,\pi].$

Răspuns. $\frac{32}{3}$.

20. $\int\limits_C (x+y)\,\mathrm{d}\ell$, dacă C este curbă închisă rectificabilă care are ca imagine pătratul $A_1(0,0)$, $A_2(1,-1)$, $A_3(2,0)$, $A_4(1,1)$ şi ambele capete în origine.

Răspuns. $3+2\sqrt{2}$.

21. Să se calculeze masa firului material care este imaginea drumului

$$C:\begin{cases} x=\frac{3}{8}t^8; \\ y=\frac{1}{2}t^8; \qquad t\in[0,1] \\ z=\frac{\sqrt{11}}{3}t^3, \end{cases}$$

şi care are densitatea liniară $\rho(x,y,z)=\sqrt[4]{2y}$.

Răspuns. $\frac{60+11\ln 11}{100}$.

22. Să se calculeze integrala

$$\int_C |y|\,\mathrm{d}\ell,$$

dacă C este arcul lemniscatei $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$.

Răspuns. $2a^2(2-\sqrt{2})$.

23. Să se calculeze integrala

$$\int_C \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}\ell,$$

dacă C este un contur convex limitat de curbele $x^2+y^2=a^2$, $x=y$ şi $x=0$.

Răspuns. $2(\mathrm{e}^a-1)+\frac{\pi}{4}a\mathrm{e}^a$.

24. Să se calculeze integrala $\int_C z\mathrm{d}\ell$ dacă C este elicea conică $x=t\cos t,\ y=t\sin t,\ z=t,\ t\in[0,a]$.

Răspuns. $\frac{1}{3}\left[(2+a)^{\frac{3}{2}}-2^{\frac{3}{2}}\right]$.

25. Să se determine masa firului material care este imaginea drumului

$$C = y = \begin{cases} x = at; \\ \frac{a}{2}t^2; \\ z = \frac{a}{3}t^3, \end{cases} \qquad t \in [0,1],\ a > 0$$

şi a cărei densitate liniară este $\rho(x, y, z) = \sqrt{\frac{2y}{a}}$.

Răspuns. $\frac{a}{8}\left[\left(3\sqrt{3} - 1\right) + \frac{3}{2}\ln\frac{3 + 2\sqrt{3}}{3}\right]$.

26. Să se calculeze $\int\limits_C x\mathrm{d}y$ dacă

$$C = \begin{cases} x = \mathrm{e}^t; \\ y = \ln\left(1 + \mathrm{e}^t\right), \end{cases} \quad t \in [0, \ln 2].$$

Răspuns. $1 + \ln\frac{2}{3}$.

27. Să se calculeze integrala $\int\limits_C (\arcsin y)\mathrm{d}x + x^3\mathrm{d}y$ dacă

$$C: \begin{cases} x = -t; \\ y = \sqrt{1 - t^2}, \end{cases} \quad t \in [-1, 1].$$

Răspuns. $\frac{3\pi}{8} - 2$.

28. Să se calculeze integrala

$$\int\limits_C x\mathrm{d}x + xy\mathrm{d}y + xyz\mathrm{d}z, \quad \text{dacă } C: \begin{cases} x = \mathrm{e}^t; \\ y = \mathrm{e}^{-t}; \\ z = \sqrt{2}t, \end{cases} \quad t \in [0, 1].$$

Răspuns. $\frac{\mathrm{e}^2}{2} + \frac{2 - \mathrm{e}}{2\mathrm{e}}$.

29. Să se calculeze integrala

$$\int_C z\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x + xz\mathrm{d}y + \left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}z, \text{ dacă } C = \begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = bt \end{cases}$$

$$t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad a, b > 0.$$

Răspuns. $\frac{a^2 b}{2}(\pi - 1)$.

30. Să se calculeze integrala $\int_C \sqrt{y^2 - x + 2}\,(\mathrm{d}x + \mathrm{d}y)$, unde C este curba simplă închisă orientată pozitiv care are ambele extremități în punctul $A_1(0,1)$ şi drept imagine parabola $y^2 = x + 1$ în cadranele II şi III şi parabola $2y^2 = -x + 2$ în cadranele I şi IV.

Răspuns. $-\sqrt{3}$.

31. Să se calculeze integrala $\int_C \frac{\mathrm{d}x + \mathrm{d}y}{\max(|x|, |y|)}$, unde C este curba simplă, închisă şi orientată pozitiv care are drept imagine dreptunghiul $A_1A_2A_3A_4A_1$, unde $A_1(-1,-1)$, $A_2(2,-1)$; $A_3(2,1)$; $A_4 = (-1,1)$.

Răspuns. -1.

32. Să se calculeze integrala

$$\int_C \sqrt{y^2+z^2}\,\mathrm{d}x + \sqrt{z^2+x^2}\,\mathrm{d}y + \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}z,$$

unde C este curba simplă care are drept imagine segmentul din spațiu AB cu $A(-1,-1,-1)$ şi $B(2,2,2)$ şi capătul în punctul A.

Răspuns. $\frac{15\sqrt{2}}{2}$.

33. Să se calculeze integrala

$$\int_C y\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y + x\mathrm{d}z,$$

unde C este curba simplă închisă care are drept imagine triunghiul din spațiu $A_1A_2A_3A_1$ cu vârfurile $A_1(1,0,0)$; $A_2(0,1,0)$; $A_3(0,0,1)$.

Răspuns. $-\dfrac{3}{2}$.

34. Să se calculeze integrala

$$\int_{\left(\frac{1}{3},-2\right)}^{(3,0)} \frac{y}{1+xy}\mathrm{d}x+\frac{x}{1+xy}\mathrm{d}y$$

pe o curbă a cărei imagine nu intersectează hiperbola $xy=-1$.

Răspuns. $\ln 3$.

35. Stabilind că expresia $\omega(x,y,z)=\left(y^2-3x^2\right)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y$ este o diferențială totală să se găsească o funcție $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, astfel încât $\mathrm{d}F=\omega$.

Răspuns. $F(x,y)=-x^3+xy^2+\mathrm{C}$.

36. Stabilind în prealabil că expresia

$$\omega=\left(\frac{z+xy}{xz}+\frac{y}{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x+x\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}y+\frac{z-xy}{z^2}\mathrm{d}z,\ x>0,\ z>0$$

este o diferențială totală să se găsească o funcție $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, astfel încât $\mathrm{d}F=\omega$.

Răspuns. $F(x,y,z)=\ln xz-\operatorname{arctg}\dfrac{y}{z}+\dfrac{xy}{z}+\mathrm{C}$.

MODULUL 7

INTEGRALA DUBLĂ

6.1 BREVIAR TEORETIC

Fie D o mulțime compactă din $\mathbb{R}^2$ astfel încât $D \subset [a,b] \times [c,d]$. Frontiera domeniului D este o curbă închisă alcătuită dintr-o reuniune finită de imagini de curbe netede. Să considerăm diviziunile:

$$\delta = (a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b),$$
$$\overline{\delta} = (c = y_0 < y_1 < \ldots < y_m = d)$$

ale intervalului $[a,b]$, respectiv $[c,d]$. Paralelele la axa Oy prin punctele diviziunii δ și paralelele la axa Ox prin punctele diviziunii $\overline{\delta}$ împart dreptunghiul $[a,b] \times [c,d]$ în $n \times m$ dreptunghiuri de forma

$$I_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times \left[y_{i-1}, y_j \right],\ 1 \le i \le n,\ 1 \le j \le m.$$

Să notăm cu Λ mulțimea dreptunghiurilor conținute în D sau care au puncte comune cu D.

Definiția 6.1. Vom numi diviziune a domeniului D mulțimea dreptunghiurilor $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_p$ din Λ și vom nota

$$\Delta = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_p),$$

ordinea de numerotare a dreptunghiurilor fiind arbitrară. Norma diviziunii Δ este egală cu

$$\|\Delta\| = \max\left\{ x_i - x_{i-1}, y_j - y_{j-1} \middle| 1 \le i \le n,\ 1 \le j \le m \right\} = \max\left\{ \|\delta\|, \|\overline{\delta}\| \right\}.$$

Să considerăm diviziunile δ și $\overline{\delta}'$ ale intervalului $[a,b]$ și, respectiv, $[c,d]$ mai fine decât δ; adică $\delta' \supset \delta,\ \overline{\delta}' \supset \overline{\delta}$. Acestor diviziuni le corespunde o diviziune Δ' a domeniului D care este mai fină decât Δ și $\|\Delta'\| \le \|\Delta\|$, deoarece

$$\|\delta'\| \le \|\delta\|,\ \|\overline{\delta}'\| \le \|\overline{\delta}\|.$$

Fie $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ o funcție mărginită. Notăm cu

$$m_k = \inf\left\{ f(x,y) \middle| (x,y) \in \delta_k \right\},\ 1 \le k \le p,$$

$$M_k = \sup\left\{ f(x,y) \middle| (x,y) \in \delta_k \right\},\ 1 \le k \le p$$

şi definim

$$s_\Delta(f) = \sum_{k=1}^{p} m_k \cdot \text{aria}\,\delta_k,\ S_\Delta(f) = \sum_{k=1}^{p} M_k \cdot \text{aria}\,\delta_k$$

suma Darboux inferioară, respectiv suma Darboux superioară asociată funcției f şi diviziunii Δ.

Sumele Darboux $s_\Delta(f)$ şi $S_\Delta(f)$ aproximează prin lipsă, respectiv prin adaos volumul corpului mărginit de suprafața $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D$, planul *x*O*y* şi cilindrul cu generatoarele paralele cu axa Oz şi a cărui curbă directoare în planul *x*O*y* este frontiera lui *D*. Pentru f pozitivă suprafața este situată deasupra planului *x*O*y* şi are ca proiecție pe acest plan pe *D*.

Fie $(\xi_k, \eta_k) \in \delta_k$, $1 \le k \le p$, un sistem de puncte intermediare asociat diviziunii Δ a domeniului *D*. Numărul real

$$\sigma_\Delta(f, \xi_k, \eta_k) = \sum_{k=1}^{p} f(\xi_k, \eta_k) \cdot \text{aria}\,\delta_k$$

se numeşte suma Riemann asociată funcției *f*, diviziunii Δ şi sistemului de puncte intermediare $(\xi_k, \eta_k) \in \delta_k$, $1 \le k \le p$.

Propoziția 6.2

1. Dacă Δ' este o diviziune mai fina decât Δ, atunci

$$s_\Delta(f) \le s_{\Delta'}(f) \le S_{\Delta'}(f) \le S_\Delta(f).$$

2. Pentru orice diviziuni Δ şi Δ' ale lui *D* avem:

$$s_\Delta(f) \le S_{\Delta'}(f).$$

3. Pentru orice sumă Riemann $\sigma_\Delta(f, \xi_k, \eta_k)$, avem

$$s_\Delta(f) \le \sigma_\Delta(f, \xi_k, \eta_k) \le S_\Delta(f).$$

Definiția 6.3. Spunem că funcția *f* este integrabilă Riemann pe *D* dacă există $I \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există $\delta_\varepsilon > 0$, astfel încât pentru orice diviziune Δ a lui cu $\|\Delta\| < \delta_\in$ şi pentru orice alegere a punctelor intermediare $(\xi_k, \eta_k) \in \delta_k$, $1 \le k \le p$, rezultă că

$$\left| \sigma_\Delta(f, \xi_k, \eta_k) - I \right| < \varepsilon.$$

Numărul I cu această proprietate se notează:

$$I=\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

şi se numeşte integrala dublă a lui f pe D. Domeniul D se numeşte domeniul de integrare, iar $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ se numeşte elementul de arie.

Teorema 6.4 (Criteriul lui Darboux)

Funcția mărginită $f:D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ este integrabilă Riemann pe D dacă şi numai dacă oricare ar fi $\varepsilon>0$ există $\delta_\in>0$, astfel încât pentru orice diviziune Δ a lui D cu $\|\Delta\|<\delta_\in$ să avem:

$$S_\Delta(f)-s_\Delta(f)<\varepsilon.$$

Din definiția integralei duble rezultă următoarele proprietăți (presupunem că integralele există):

a) aria domeniului D este

$$\text{aria}\,D=\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y;$$

b) liniaritatea integralei duble este dată de formulele:

$$\iint_D\left[f_1(x,y)+f_2(x,y)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D f_1(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_D f_2(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$\iint_D \alpha f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\alpha\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ \alpha\in\mathbb{R};$$

c) dacă D este împărțit în două subdomenii D_1 şi D_2 printr-o curbă, atunci

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y;$$

d) dacă f este pozitivă pe D, adică

$$f(x,y)\geq 0,\ (\forall)(x,y)\in D,$$

atunci $\iint_D f(x,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z\geq 0$;

e) dacă f este integrabilă pe D, atunci $|f|$ este integrabilă pe D şi are loc inegalitatea:

$$\left|\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|\leq\iint_D |f(x,y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Teorema 6.5 Orice funcție continuă $f:D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ este integrabilă Riemann pe D.

Mulțimea funcțiilor integrabile pe D este mai bogată decât mulțimea funcțiilor continue, după cum va rezulta din următoarea teoremă.

Definiția 6.6. O mulțime $A\subset\mathbb{R}^2$ se numeşte mulțime neglijabilă dacă pentru orice $\varepsilon>0$ există un şir de dreptunghiuri deschise $(I_n)_{n\geq 1}\subset\mathbb{R}^2$, astfel încât:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\text{aria}(I_n)<\varepsilon,\ \bigcup_{n=1}^{\infty}I_n\supset A.$$

Propoziția 6.7

a) Orice mulțime cel mult numărabilă $A=\{(x_n,y_n)\,|\,n\in\mathbb{N}^*\}$ este neglijabilă.

b) Dacă $A\subset B$ şi B este neglijabilă, atunci A este neglijabilă.

c) Orice reuniune numărabilă de mulțimi neglijabile este o mulțime neglijabilă.

Fie $f:D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$. Notăm:

$$A_f:=\{(x,y)\in D\,|\,(x,y)\text{ este punct de discontinuitate pentru } f\}.$$

Definiția 6.8. Funcția $f:D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ se numeşte continuă aproape peste tot (prescurtat a.p.t.) dacă A_f este o mulțime neglijabilă.

Teorema 6.9 (Criteriul de integrabilitate al lui Lebesgue)

O funcție $f:D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ este integrabilă Riemann dacă şi numai dacă este mărginită şi continuă aproape peste tot.

Teorema 6.10. Fie $f:D=[a,b]\times[c,d]\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ o funcție mărginită şi integrabilă pe D, astfel încât pentru orice $x\in[a,b]$ există integrala

$$\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y:=F(x).$$

Atunci funcția $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ este integrabilă pe $[a,b]$ şi are loc formula

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$$

În mod analog, avem şi formula

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y .$$

De obicei, se notează:

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x \left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y \right),$$

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y \left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x \right).$$

În acest fel,

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) = \int_c^d \mathrm{d}y \left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x \right).$$

Definiția 6.11. $D \subset \mathbb{R}^2$ se numeşte domeniul simplu în raport cu axa O*y* dacă

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| a \le x \le b,\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x) \right\},$$

unde funcțiile $\varphi_1, \varphi_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$, $\varphi_1 \le \varphi_2$, sunt continue.

$D \subset \mathbb{R}^2$ se numeşte domeniul simplu în raport cu axa O*x* dacă

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| c \le y \le d,\ \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y) \right\},$$

unde funcțiile $\psi_1, \psi_2 : [c,d] \to \mathbb{R}$, $\psi_1 \le \psi_2$, sunt continue.

Teorema 6.12. Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu simplu în raport cu axa O*y* şi $f : D \to \mathbb{R}$ o funcție mărginită şi integrabilă, astfel încât pentru orice $x \in [a,b]$ există integrala

$$F(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y .$$

Atunci funcția $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ este integrabilă şi are loc formula

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x .$$

Analog se scrie formula de calcul în cazul domeniilor simple în raport cu axa O*x*. Într-adevăr, dacă

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| c \le y \le d,\ \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y) \right\}$$

este un domeniu simplu în raport cu axa Ox, atunci are loc formula

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y .$$

Pentru calculul integralelor duble pe domenii mai complicate, împărțim aceste domenii cu ajutorul unor segmente paralele cu axele de coordonate, în subdomenii care sunt simple în raport cu axa Ox sau Oy, apoi folosim formulele anterioare şi proprietatea de aditivitate a integralei duble.

Fie $D' \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu compact, raportat la sistemul de referință cartezian uOv, având frontiera Γ', care este urma unei curbe închise netede. Să considerăm transformarea regulată

$$T : \begin{cases} x = \varphi(u,v); \\ y = \psi(u,v), \end{cases} \quad \varphi,\psi \in \mathrm{C}^1(D_1); \quad \frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)} \neq 0 \ \text{ pe } D_1 \subset \mathbb{R}^2,$$

unde D_1 este o mulțime deschisă ce conține compactul $D' \subset \mathbb{R}^2$. Atunci când (u,v) parcurge pe D', (x,y) prin transformarea regulată T parcurge compactul $D \subset \mathbb{R}^2$ raportat la sistemul de referință cartezian xOy. În acest caz spunem că domeniul $D \subset \mathbb{R}^2$ este imaginea domeniului $D' \subset \mathbb{R}^2$ prin transformarea regulată T şi se scrie $D = T(D')$, iar frontiera Γ a domeniului este imaginea frontierei Γ' prin transformarea regulată T, adică $\Gamma = T(\Gamma')$. Dacă $\varphi,\psi \in \mathrm{C}^2(D_1)$, are loc formula schimbării de variabilă în integrala dublă.

Teorema 6.13 (Formula schimbării de variabilă în integrala dublă)

Fie $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ o funcție continuă pe D. Atunci

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D'} f\left(\varphi(u,v),\psi(u,v)\right) \left| \frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)} \right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v .$$

Să considerăm trecerea de la coordonatele carteziene (x,y) la coordonatele polare (ρ,θ) prin transformarea regulată.

$$T : \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}; \ \ \rho \in [0,R],\ \theta \in [0,2\pi],$$

unde $\dfrac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)} = \rho \neq 0$.

În acest caz, formula de schimbare de variabilă în integrala dublă devine

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D'} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta,\ D = T(D') .$$

De asemenea, se foloseşte transformarea regulată care permite trecerea de la coordonatele carteziene (x, y) la coordonatele polare generalizate (ρ, θ):

$$T : \begin{cases} x = a\rho\cos\theta; \\ y = b\rho\sin\theta, \end{cases} \quad \rho \in [0,1],\ \theta \in [0, 2\pi],$$

unde $\dfrac{D(x, y)}{D(\rho, \theta)} = ab\rho \neq 0$. În acest caz, formula de schimbare de variabilă în integrala dublă devine

$$\iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = ab\iint_{D'} f(a\rho\cos\theta, b\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta,\ D = T(D').$$

Principalele aplicaţii ale integralelor duble sunt:

a) Fie $D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ un domeniu compact a cărui frontieră este urma unei curbe închise netede (sau netedă pe porţiuni). Aria domeniului *D* este dată de formula

$$\text{aria}\, D = \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

b) Fie funcţia $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continuă şi pozitivă. Notăm cu Γ_f subgraficul lui *f*,

$$\Gamma_f = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \middle| (x, y) \in D, 0 \leq z \leq f(x, y)\right\}.$$

Volumul lui Γ_f este

$$\text{volum}\,\Gamma_f = \iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

c) Să considerăm o placă materială plană neomogenă, de grosime neglijabilă, care are forma dată de domeniul compact $D \subset \mathbb{R}^2$. Dacă $\rho : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ este densitatea plăcii materiale şi ρ este presupusă continuă, atunci masa *M* a plăcii este

$$M = \iint_D \rho(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Coordonatele (x_G, y_G) ale centrului de greutate al plăcii sunt de formulele:

$$x_G = \frac{1}{M}\iint_D x\rho(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y;\quad y_G = \frac{1}{M}\iint_D y\rho(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Dacă $\rho = \text{const.}$ (placa este omogenă), atunci

$$x_G = \frac{1}{\text{aria}\, D}\iint_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y;\quad y_G = \frac{1}{\text{aria}\, D}\iint_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

d) Fie o placă materială plană neomogenă de grosime neglijabilă, care are forma dată de domeniul compact $D \subset \mathbb{R}^2$ şi $\rho : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ densitatea plăcii materiale. Momentul de inerţie faţă de originea axelor de coordonate este dat de formula

$$I_O = \iint_D \left(x^2 + y^2\right)\rho(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Momentele de inerţie I_{Ox} şi I_{Oy} ale plăcii faţă de axele de coordonate Ox şi Oy au expresiile:

$$I_{Ox} = \iint_D y^2\rho(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y;\quad I_{Oy} = \iint_D x^2\rho(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

şi se observă că $I_O = I_{Ox} + I_{Oy}$.

6.2 PROBLEME REZOLVATE

1 Să se arate că funcţia $f : [0,1]\times[2,3] \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + y^3$ este integrabilă.

Rezolvare. Funcţia f este continuă pe domeniul de definiţie, deci integrabilă.

2 Funcţia $f : [-1,1]\times[-1,1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}, & \text{dacă } (x, y) \neq (0,0) \\ 1, & \text{dacă } (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

este integrabilă?

Rezolvare. Observăm că funcţia f este mărginită, deoarece $\left|f(x, y)\right| \le 1$, $(\forall)\, x, y \in [-1,1]$. Pe de altă parte, f are un singur punct de discontinuitate, $(0,0)$. Conform criteriului lui Lebesgue f este integrabilă.

Să se calculeze ariile următoarelor domenii din $\mathbb{R}^2$.

3 $D=\left\{(x,y)\middle| x^2\le y\le 4-x^2\right\}$

Rezolvare.

$$\text{aria}(D)=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\left(\int_{x^2}^{4-x^2}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\left(4-x^2-x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{16\sqrt{2}}{3}.$$

4 $D=\left\{(x,y)\middle| x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\le a^{\frac{2}{3}}\right\}.$

Rezolvare.

$$\frac{1}{4}\text{aria}(D)=\int_0^a\left(\int_0^{\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_0^a\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x=\frac{3\pi a^2}{8}.$$

Să se calculeze următoarele integrale duble:

5 $I=\int_0^1\left(\int_x^1 \mathrm{e}^{y^2}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$

Rezolvare. Se observă că:

$$\left\{(x,y)\middle|0\le x\le 1, x\le y\le 1\right\}=\left\{(x,y)\middle|0\le y\le 1, 0\le x\le y\right\}.$$

Atunci: $I=\int_0^1\left(\int_0^y \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=\int_0^1 y\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right).$

6 $I=\iint_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, unde D este domeniul mărginit de axa Ox şi semicercul superior $(x-2)^2+y^2=1$.

Rezolvare. $D=\left\{(x,y)\middle|1\le x\le 3, 0\le y\le\sqrt{1-(x-2)^2}\right\},$

$$I=\int_1^3\left(\int_0^{\sqrt{1-(x-2)^2}} xy\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_1^3 x\frac{y^2}{2}\Bigg|_{y=0}^{y=\sqrt{1-(x-2)^2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_1^3 x\left(4x-x^2-3\right)\mathrm{d}x=\frac{4}{3}.$$

Cu ajutorul unor schimbări de variabilă adecvate, să se calculeze integralele duble:

7 $\iint\limits_D e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy$, unde

$$D=\left\{(x,y)\,\middle|\, x^2+y^2\le a^2,\, x\ge 0,\ y\ge 0,\, a>0\right\}.$$

Rezolvare. Vom trece la coordonate polare:

$$x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta,\ \rho\in[0,a],\ \theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right].$$

Rezultă că integrala este egală cu

$$\int_0^a\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\rho^2}\cdot\rho d\theta\right)d\rho=\frac{\pi}{2}\int_0^a e^{-\rho^2}\cdot\rho\,d\rho=\frac{\pi}{2}\cdot\left.\frac{e^{-\rho^2}}{-2}\right|_0^a=\frac{\pi\left(1-e^{-a^2}\right)}{4}.$$

8 $\int_0^\infty\left(\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\,dx\right)dy$; să se deducă valoarea integralei $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$.

Rezolvare. Folosind problema precedentă avem

$$I=\int_0^\infty\left(\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\,dx\right)dy=\lim_{a\to\infty}\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\le a^2\\ x\ge 0,y\ge 0}} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy=$$

$$=\lim_{a\to\infty}\frac{\pi\left(1-e^{-a^2}\right)}{4}=\frac{\pi}{4}.$$

Pe de altă parte,

$$I=\int_0^\infty e^{-x^2}dx\cdot\int_0^\infty e^{-y^2}dy=\left(\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx\right)^2.$$

Rezultă că

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\sqrt{I}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

9 Să se calculeze integrala dublă improprie

$$I=\iint_D e^{-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

unde D este exteriorul elipsei $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$.

Rezolvare. Facem schimbarea de variabile

$$x=a\rho\cos\theta,\ y=b\rho\sin\theta,\ J=ab\rho,$$

observând că $\theta\in[0,2\pi]$, iar $\rho\in[1,\infty)$. Rezultă:

$$I=ab\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_1^{\infty}e^{-\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho=\frac{\pi ab}{e}.$$

10 Să se calculeze integrala dublă

$$I=\iint_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

unde D este domeniul definit prin intersecția parabolelor:

$$y^2=px,\ y^2=qx,\ x^2=ay,\ x^2=by\quad(0<p<q,\ 0<a<b).$$

Rezolvare. Vom face schimbarea de variabilă $y^2=ux;\ x^2=vy$, unde $u\in[p,q]$, iar $v\in[a,b]$. Prin această schimbare de variabilă patrulaterul curbiliniu delimitat de parabolele din enunț se transformă într-un patrulater determinat de intersecția dreptelor:

$$u=p;\ u=q\text{ și }v=a;\ v=b;\ J=-\frac{1}{3}.$$

Deci,

$$I=\frac{1}{3}\int_p^q u\mathrm{d}u\int_a^b v^2\mathrm{d}v=\frac{\left(b^3-a^3\right)\left(q^2-p^2\right)}{18}.$$

11 Să se afle volumul corpului mărginit de planul xOy, cilindrul $x^2+y^2=1$ și planul $x+y+z=3$.

Rezolvare.

$\text{Vol} = \iint\limits_D (3 - x - y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, unde D este proiecția pe planul xOy a intersecției dintre planul $z = 3 - x - y$ şi cilindrul $x^2 + y^2 = 1$, adică $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \le 1\}$. Atunci:

$$\text{Vol} = \int_0^1 \rho\mathrm{d}\rho \int_0^{2\pi} (3 - \rho\cos\theta - \rho\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta = 6\pi \int_0^1 \rho\mathrm{d}\rho = 6\pi \frac{\rho^2}{2}\Big|_0^1 = 3\pi.$$

12 Să se determine coordonatele centrului de greutate pentru un sector circular cu raza R şi $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Rezolvare. Să notăm cu D domeniul din enunț. Avem

$$I_1 = \iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^R \rho\mathrm{d}\rho \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\theta = \frac{\pi R^2}{8},$$

$$I_2 = \iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\theta\mathrm{d}\theta \int_0^R \rho^2\mathrm{d}\rho = \frac{R^3\sqrt{2}}{6},$$

$$I_3 = \iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\theta\mathrm{d}\theta \int_0^R \rho^2\mathrm{d}\rho = \frac{R^3\left(2 - \sqrt{2}\right)}{6}.$$

Rezultă coordonatele centrului de greutate:

$$x_G = \frac{I_2}{I_1} = \frac{4R\sqrt{2}}{3};$$

$$y_G = \frac{I_3}{I_1} = \frac{4R\left(2 - \sqrt{2}\right)}{3}.$$

13 Să se calculeze momentul de inerție față de axa Oy al plăcii plane materiale delimitată de $y^2 = 1 - x,\ x = 0$, având densitatea $\rho(x, y) = xy$.

Rezolvare.

$$I_{0y} = \iint\limits_D xyx^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 x^3\mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{1-x}} y\mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{x^3(1-x)}{2}\mathrm{d}x = \frac{1}{40}.$$

14 Să se calculeze momentul de inerție față de originea axelor al plăcii plane materiale omogene de densitate constantă ρ_0, delimitată de $x^2+y^2=R^2$.

Rezolvare. Fie $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le R^2\}$.

$$I_0=\iint_D\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R\rho^2\rho\,\mathrm{d}\rho=2\pi\cdot\left.\frac{\rho^4}{4}\right|_0^R=\frac{\pi R^4}{2}.$$

15 Fie funcția $f:D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=\left[x^2+y^2\right]$, unde

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,\middle|\,x^2+y^2<4\right\}.$$

Dacă $\tau\in\mathcal{D}(D)$ este o diviziune de forma $\tau=\{d_0,d_1,d_2,d_3\}$ cu

$$d_k=\left\{(x,y)\in D\,\middle|\,k\le x^2+y^2<k+1\right\},\ k=\overline{0,3},$$

a) să se calculeze sumele Darboux superioară și inferioară corespunzătoare fiecărei diviziunii τ și funcției f;

b) să se precizeze dacă f este Darboux integrabilă pe D și în caz afirmativ să se calculeze $\iint_D f$.

Rezolvare. Notăm cu:

$$M_k=\max\left\{f(x,y)\,\middle|\,(x,y)\in d_k\right\};\ m_k=\min\left\{f(x,y)\,\middle|\,(x,y)\in d_k\right\},\ k=\overline{0,3},$$

și constatăm că $M_k=m_k$, $\forall\,k=\overline{0,3}$. Prin urmare, $S(f,\tau)=s(f,\tau)$ și f este Darboux integrabilă pe D. Mai mult:

$$S(f,\tau)=\sum_{k=0}^{3}M_k\cdot\text{aria}\,d_k=0\cdot\pi\cdot1+1\cdot\pi\cdot1+2\cdot\pi\cdot1+3\cdot\pi\cdot1=6\pi.$$

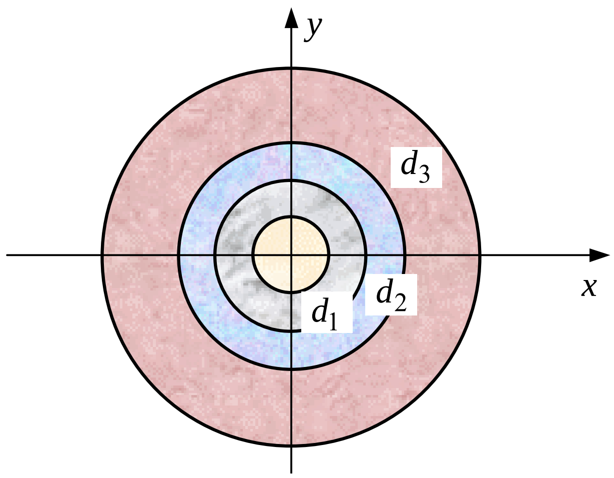


Fig. 6.1

În concluzie, f este Darboux integrabilă pe D şi $\iint_D f = 6\pi$.

16 Fie funcția $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \{|x|+|y|\}$, unde

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x, y \in [-2,2]\right\},$$

iar acoladele desemnează funcția parte fracționară.

Dacă $\tau \in \mathcal{D}(D)$ este o diviziune de forma $\tau = \{d_0, d_1, \ldots, d_9\}$, unde:

$$d_k = \left\{(x,y) \in D \,\middle|\, k \le |x|+|y| < k+1\right\},\ k = \overline{0,1}$$

$$d_2 = \left\{(x,y) \in D \,\middle|\, 2 \le |x|+|y| < 3,\ x<0,\ y>0\right\}$$

$$d_4 = \left\{(x,y) \in D \,\middle|\, 2 \le |x|+|y| < 3,\ x>0,\ y>0\right\}$$

$$d_6 = \left\{(x,y) \in D \,\middle|\, 2 \le |x|+|y| < 3,\ y<0,\ x>0\right\}$$

$$d_8 = \left\{(x,y) \in D \,\middle|\, 2 \le |x|+|y| < 3,\ x<0,\ y<0\right\}$$

$$d_3 = \left\{(x,y) \in D \,\middle|\, 3 \le |x|+|y| < 4,\ x<0,\ y>0\right\}$$

$$d_5 = \left\{(x,y) \in D \,\middle|\, 3 \le |x|+|y| < 4,\ x>0,\ y>0\right\}$$

$$d_7 = \left\{(x,y) \in D \,\middle|\, 3 \le |x|+|y| < 4,\quad x>0,\quad y<0\right\}$$

$$d_9 = \left\{(x,y) \in D \,\middle|\, 3 \le |x|+|y| < 4,\quad x<0,\quad y<0\right\}.$$

Să se calculeze sumele Darboux superioară şi inferioară corespunzătoare diviziunii τ şi funcției f.

Să se precizeze dacă f este Darboux integrabilă pe D şi în caz afirmativ să se calculeze $\iint_D f$.

Rezolvare. Fie

$$M_k = \max\left\{f(x,y) \,\middle|\, (x,y) \in d_k\right\};\ m_k = \min\left\{f(x,y) \,\middle|\, (x,y) \in d_k\right\},\ k = \overline{0,9},$$

şi constatăm că $M_k = m_k$, $\forall\, k = \overline{0,9}$. Prin urmare, $S(f,\tau) = s(f,\tau)$ şi f este Darboux integrabilă pe D. Mai mult:

$$S(f,\tau) = \sum_{k=0}^{9} M_k \,\text{aria}\, d_k = 0 \cdot \text{aria}\, d_0 + 1 \cdot \text{aria}\, d_1 + 2 \cdot (\text{aria}\, d_2 + \text{aria}\, d_4 + \text{aria}\, d_6 + \text{aria}\, d_8) +$$

$$+ 3 \cdot (\text{aria}\, d_3 + \text{aria}\, d_5 + \text{aria}\, d_7 + \text{aria}\, d_9) = 16 + 2 \cdot 4\frac{3}{2} + 3 \cdot 4\frac{1}{2} = 24$$

şi

$$\iint_D f = 24.$$

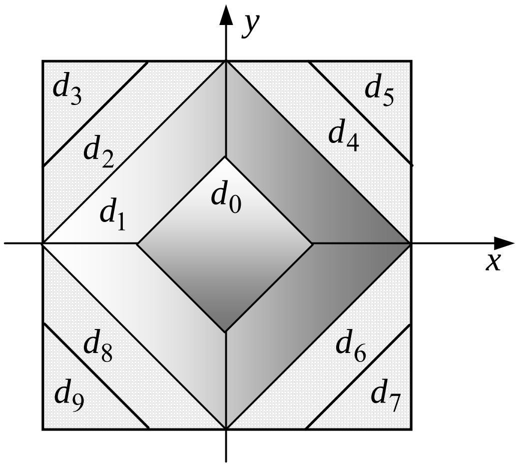


Fig. 6.2

17 Fie funcția $f:[0.1]^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y)=xy$ şi

$$d_n=\left\{0,\frac{1}{2},\frac{2}{n},\ldots,\frac{k}{n},\ldots,\frac{n-1}{n},1\right\}\in \mathcal{D}\left([0,1]\right),\ n\in \mathbb{N}^*$$

şi $\mathcal{P}_n=(d_n,d_n)\in \mathcal{D}\left([0,1]^2\right)$.

Să se calculeze sumele Darboux superioare şi inferioare corespunzătoare diviziunii $\mathcal{P}_n$.

Să se stabilească dacă f este Darboux integrabilă pe $[0,1]^2$ şi să se calculeze $\iint_{[0,1]^2} f$.

Rezolvare.

Fie $d_{ij}=\left\{(x,y)\in [0,1]^2 \middle| \frac{i-1}{n}\le x<\frac{i}{n},\ \frac{j-1}{n}\le y<\frac{j}{n}\right\},\ i,j=\overline{1,n}$.

Atunci:

$$m_{ij}=\min\left\{f(x,y)\middle|(x,y)\in d_{ij}\right\}=\frac{(i-1)(j-1)}{n^2};$$

$$M_{ij}=\max\left\{f(x,y)\middle|(x,y)\in d_{ij}\right\}=\frac{ij}{n^2}.$$

Prin urmare:

$$S(f,P_n)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{ij}{n^2}=\frac{(n+1)^2}{4n^2};$$

$$s(f,P_n)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{(i-1)(j-1)}{n^2}=\frac{(n-1)^2}{4n^2},$$

deoarece aria $d_{ij}=\frac{1}{n^2}$.

Cum $$\overline{\iint_{[0,1]^2}} f=\inf_n S(f,P_n)=\lim_n\frac{(n+1)^2}{4n^2}=\frac{1}{4}$$

şi

$$\underline{\iint_{[0,1]^2}} f=\sup_n s(f,P_n)=\lim_n\frac{(n-1)^2}{4n^2}=\frac{1}{4},$$

deducem că f este Darboux integrabilă pe $[0,1]^2$ şi $\iint_{[0,1]^2} f=\frac{1}{4}$.

18 Fie $f:[0,1]^2\to\mathbb{R}$

$$f(x,y)=\begin{cases}x+y, & (x,y)\in Q^2\cap[0,1]^2\\ x+y-1, & (x,y)\in[0,1]-Q^2\end{cases}$$

Să se arate că $\overline{\iint_{[0,1]^2}} f=1$ şi $\underline{\iint_{[0,1]^2}} f=0.$

Rezolvare. Consider o diviziune

$$d_n=\left\{0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\ldots,\frac{k}{n},\ldots,\frac{n-1}{n},1\right\}\in D([0,1]),\ n\in\mathbb{N}^*\text{ şi}$$

$$P_n=(d_n,d_n)\in D\left([0,1]^2\right).$$

Vom nota

$$d_{ij}=\left\{(x,y)\in[0,1]^2\,\middle|\,\frac{i-1}{n}\le x<\frac{i}{n},\quad \frac{j-1}{n}\le j<\frac{j}{n}\right\},\ i,j=\overline{1,n}\text{ şi}$$

$$M_{ij}=\max\left\{f(x,y)\middle|(x,y)\in d_{ij}\right\}=\frac{i}{n}+\frac{j}{n},$$

$$m_{ij}=\min\left\{f(x,y)\middle|(x,y)\in d_{ij}\right\}=\frac{i-1}{n}+\frac{j-1}{n}-1.$$

Prin urmare:

$$S(f,\mathsf{P}_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}M_{ij}\,\text{aria}\,d_{ij}=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{i}{n}+\frac{j}{n}\right)=\frac{n+1}{n},$$

$$s(f,\mathsf{P}_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}m_{ij}\,\text{aria}\,d_{ij}=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{i-1}{n}+\frac{j-1}{n}-1\right)=-\frac{1}{n},$$

iar

$$\overline{\iint_{[0,1]^2}}f=\inf_n S(f,\mathsf{P}_n)=\lim_n\frac{n+1}{n}=1,$$

$$\underline{\iint_{[0,1]^2}}f=\sup_n s(f,\mathsf{P}_n)=\lim_n\frac{-1}{n}=0.$$

În concluzie, f nu este Darboux integrabilă pe $[0,1]^2$.

19 Să se arate că $f:[0,2]^2\to\mathbb{R}$

$$f(x,y)=\begin{cases}xy, & (x,y)\in[0,1]^2\\ x-y, & (x,y)\in[0,1]\times(1,2]\\ x+y, & (x,y)\in(1,2]\times[0,1]\\ x^2+y^2, & (x,y)\in(1,2]^2\end{cases}$$

este Darboux integrabilă pe $[0,1]^2$ şi să se calculeze $\iint_{[0,2]^2}f$.

Rezolvare. Notăm prin:

$D(f)=\left\{(x,y)\in[0,2]^2\,\middle|\,f \text{ este discontinuă în punctul } (x,y)\right\}$. Este clar că mulţimea punctelor de discontinuitate a funcţiei este $D(f)=\overline{AB}\cup\overline{CD}$, unde $\overline{AB}=\left\{(x,y)\in[0,2]^2\,\middle|\,x\in[0,2],\ y=1\right\}$ şi $\overline{CD}=\left\{(x,y)\in[0,2]^2\,\middle|\,x=1,\ y\in[0,2]\right\}$.

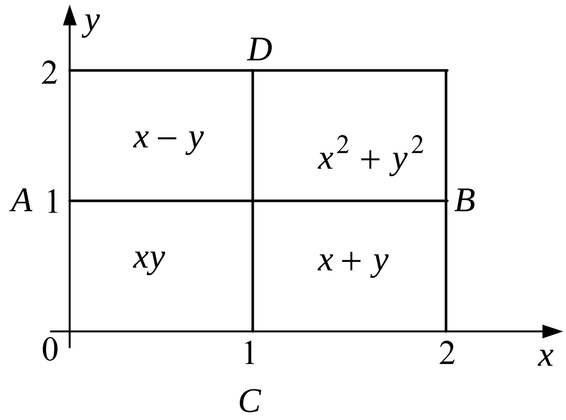


Fig. 6.3

Prin criteriul de integrabilitate Lebesgue f este Darboux integrabilă pe $[0,2]^2$ dacă şi numai dacă este mărginită şi $D(f)$ este o mulțime neglijabilă Lebesgue. Fie

$$A_k=(x_k,j_k),\ k\in\mathbb{N}^*\ \text{ şi }\ x_k=\frac{2k}{n},\ n\in\mathbb{N}^*,0\le k\le n;\ y_k=1;$$

$$D_k=[x_k,x_{k+1}]\times\left[y_k-\frac{\varepsilon}{8},y_k+\frac{\varepsilon}{8}\right],\ k=\overline{0,n-1},\ \varepsilon>0.$$

Constatăm că:

$$\text{aria}\,D_k=(x_{k+1}-x_k)\cdot\frac{\varepsilon}{4}\Rightarrow\sum_{k=0}^{n-1}\text{aria}\,D_k=\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon, \tag{6.1}$$

iar

$$\overline{AB}\subset\bigcup_{k=0}^{n-1}D_k\,. \tag{6.2}$$

Din (**6.1**) şi (**6.2**) deducem că $\overline{AB}$ este neglijabilă Lebesgue. Similar se arată că şi $\overline{CD}$ este neglijabilă Lebesgue. În concluzie, $D(f)=\overline{AB}\cup\overline{CD}$ este neglijabilă Lebesgue şi cum este mărginită, f este Darboux integrabilă pe $[0,2]^2$.

$$\iint\limits_{[0,2]^2}f=\iint\limits_{[0,1]\times[0,1]}(x\cdot y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{[0,1]\times[1,2]}(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+$$

$$+\iint\limits_{[1,2]\times[1,2]}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{[1,2]\times[0,1]}(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$

$$=\frac{1}{4}-1+2+\frac{14}{3}=\frac{71}{12}.$$

20 Fie funcția: $f:[-1,1]^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y)=\begin{cases} 0, \ (x,y)=(0,0); \\ \dfrac{xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}, \ (x,y)\in[-1,1]^2-\{(0,0)\}. \end{cases}$$

Să se arate că f nu este integrabilă Riemann pe $[-1,1]^2$, dar există integralele iterate:

$$I_1=\int_{-1}^{1}\left(\int_{1}^{1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y, \ I_2=\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

şi sunt egale.

Rezolvare. Vom arăta că f nu este mărginită pe $[-1,1]^2$.

Fie $\alpha>0, \ y_n=\alpha x_n, \ n\in\mathbb{N}$ şi $\exists \lim\limits_n x_n=0$. Atunci:

$$\lim_n f(x_n,y_n)=\lim_n \frac{\alpha}{\left(1+\alpha^2\right)^2}\cdot\frac{1}{x_n^2}=+\infty.$$

Cum f nu este mărginită pe $[-1,1]^2 \Rightarrow f$ nu este Riemann integrabilă pe $[-1,1]^2$.

$$I_1=\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=\int_{-1}^{1}\left(\frac{x}{2}\frac{\left(x^2+y^2\right)^{-2+1}}{-2+1}\Bigg|_{-1}^{+1}\right)\mathrm{d}x=0.$$

Similar $I_2=0$.

21 Fie funcția $f:[0,1]^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}, \ (x,y)\in[0,1]^2, \ xy\neq 0; \\ 0, \ (x,y)\in[0,1]^2, \ xy=0. \end{cases}$$

Să se arate că f nu este integrabilă Riemann pe $[0,1]^2$, integralele iterate există, dar sunt diferite.

Rezolvare. Vom arăta că f nu este mărginită pe $[0,1]^2$.

Fie $\alpha \in \mathbb{R}$, $|\alpha| < 1$, $y_n = \alpha x_m$ şi $\lim\limits_{n} x_n = 0$. Atunci:

$$\lim_{n} f(x_n, y_n) = \lim_{n} \frac{1-\alpha^2}{\left(1+\alpha^2\right)^2} \cdot \frac{1}{x_n^2} = +\infty .$$

Cum f nu este mărginită pe $[0,1]^2 \Rightarrow f$ nu este Riemann integrabilă pe $[0,1]^2$

$$I_1 = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_0^1 \left[\int_0^{\operatorname{arctg}\frac{1}{y}} \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha - 1}{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1} \cdot \frac{1}{y} \mathrm{d}\alpha \right] \mathrm{d}y =$$

$$= \int_0^1 -\frac{1}{2y} \sin\left(2 \operatorname{arctg} \frac{1}{y} \right) \mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{1+y^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Similar $I_2 = -\dfrac{\pi}{4}$.

22 Să se arate că mulţimea:

$$E = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y^2 \geq 2px,\ x^2 + y^2 \leq 8p^2 \right\},\ p > 0,$$

este măsurabilă Jordan şi să se calculeze aria sa.

Rezolvare. Cum ∂E este o curbă cu tangentă continuă pe porţiuni deducem că este neglijabilă Jordan $\Rightarrow E$ este măsurabilă Jordan. Există mai multe modalităţi de a calcula aria mulţimii E.

(i) Folosind aditivitatea de domeniu şi teorema Fubini:

$$\operatorname{aria} E = 2 \iint\limits_{(OAC)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\left[\int_0^{2p} \left(\int_0^{\sqrt{2px}} \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x + \int_{2p}^{2\sqrt{2}p} \left(\int_0^{\sqrt{8p^2 - x^2}} \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \right.$$

$$\left. = 2\left(\sqrt{2p} \cdot \frac{x^{3/2}}{3/2} \right)\Bigg|_0^{2p} + \frac{1}{2}\left(\arcsin \frac{x}{2\sqrt{2}p} + x\sqrt{8p^2 - x^2} \right)\Bigg|_{2p}^{2\sqrt{2}p} \right] =$$

$$= \frac{4p^2}{3} + \frac{\pi}{4}.$$

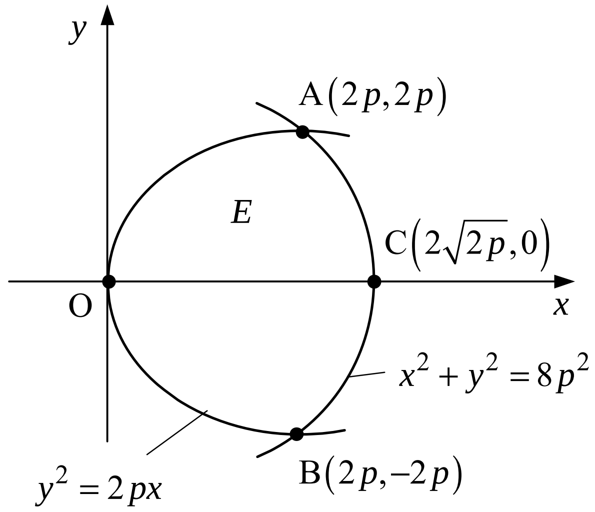


Fig. 6.4

(ii) Folosind faptul că domeniul E este simplu în raport cu axa Oy:

$$\text{aria}\, E = \int_{-2p}^{2p}\left(\int_{\frac{y^2}{2p}}^{\sqrt{8p^2-x^2}} \mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_{-2p}^{2p}\left(-\frac{y^2}{2p}+\sqrt{8p^2-x^2}\right)\mathrm{d}y = \frac{4p^2}{3}+\frac{\pi}{4}.$$

23 Folosind o schimbare de variabilă adecvată să se arate că:

$$\iint_D f\left(\frac{y^2}{x}\right) f\left(\frac{x^2}{y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{3}\left[\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u\right]^2,$$

unde

$$D = \left\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, ax \le y^2 \le bx,\ ay \le x^2 \le by\right\},\ 0<a<b,$$

iar $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este Riemann integrabilă pe $[a,b]$.

Spre deosebire de integrala Riemann a funcțiilor de variabilă reală, unde schimbarea de variabilă avea drept scop „simplificarea” funcției integrant în integrala dublă (triplă), schimbarea de variabilă are două scopuri.

- simplificarea domeniului de integrare;
- simplificarea funcției integrant.

În general nu pot fi atinse ambele scopuri simultan şi de aceea se preferă, de regulă, numai simplificarea domeniului de integrare.

Cea mai convenabilă schimbare de variabilă este cea care transformă domeniul D într-un dreptunghi.

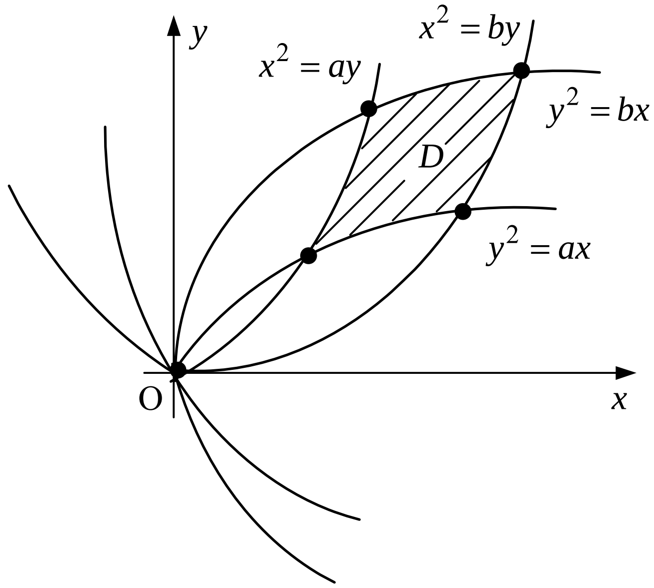


Fig. 6.5

Metoda propusă este de a determina acele curbe de coordonate ale domeniului *D*.

Aceste curbe, de regulă, se aleg din aceeaşi familie de curbe cu frontiera domeniului *D*.

În cazul de față: $T : D \to [a,b]^2$

$$T : \begin{cases} y^2 = ux \\ x^2 = vy \end{cases} \quad \text{(familii de parabole)}; \; u,v \in [a,b].$$

Jacobianul transformării $\left(\exists \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x} \text{ continue} \right)$ este:

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \frac{1}{\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)}} = \frac{1}{\dfrac{\partial u}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial y} - \dfrac{\partial u}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial x}} = -\frac{1}{3} \neq 0,$$

deci T este transformare regulată

$$\iint_D f\left(\frac{y^2}{x}\right) f\left(\frac{x}{y^2}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{[a,b]^2} f(u) \cdot f(v) \cdot \left| \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v =$$

$$= \frac{1}{3} \int_a^b \left(\int_a^b f(u) f(v) \mathrm{d}u \right) \mathrm{d}v = \frac{1}{3} \left[\int_a^b f(u) \mathrm{d}u \right]^2.$$

24 **(i)** Să se arate că transformarea

$$T = \begin{cases} u = x - y \\ v = y - x^2 \end{cases}, \ (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

aplică domeniul $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 \le y \le x\right\}$ pe domeniul

$$\Delta = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \middle| 0 \le u \le \frac{1}{4}, 0 \le v \le \frac{1}{4} - u\right\}.$$

(ii) Să se arate că:

$$\iint_{\Delta} \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \frac{1}{32} \ne \iint_{D} \left|\frac{D(u,v)}{D(x,y)}\right| \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{16}.$$

Explicați de ce nu este aplicabilă teorema de schimbare de variabilă.
Rezolvare.

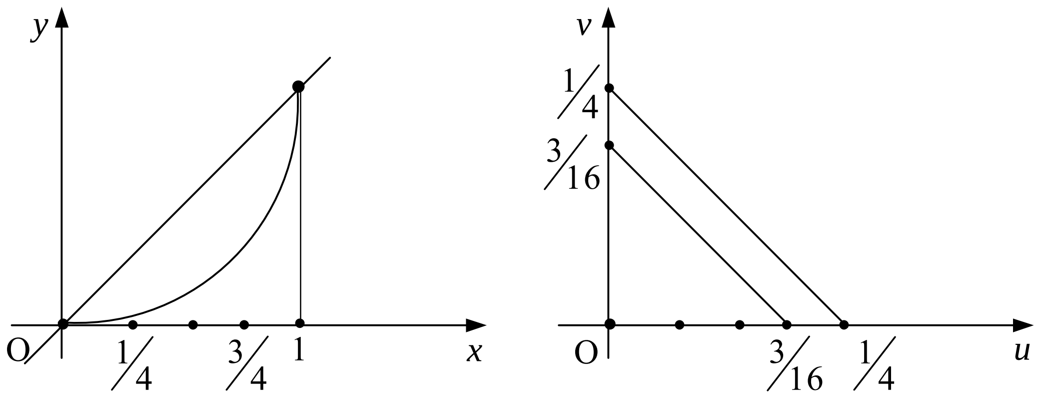


Fig. 6.6

(i) Este clar că:

$$\underset{(x,y)\in D,\, x=y}{\operatorname{Im} T} = \left\{(u,v) \in \Delta \middle| u = 0\right\},$$

$$\underset{(x,y)\in D,\, x^2=y}{\operatorname{Im} T} = \left\{(u,v) \in \Delta \middle| v = 0\right\},$$

$$\underset{(x,y)\in D,\, x=\frac{1}{2}}{\operatorname{Im} T} = \left\{(u,v) \in \Delta \middle| u + v = \frac{1}{4}\right\},$$

$$\forall (x,y) \in \overset{\circ}{D} \Rightarrow (u,v) = \left(x - y, y - x^2\right) \in \overset{\circ}{\Delta}.$$

(ii) $\iint\limits_{\Delta} \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \text{aria}\, \Delta = \dfrac{1}{32}$

$$\iint_D \left|\frac{D(u,v)}{D(x,y)}\right| \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D \left|\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right| \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D |1-2x| \mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$= \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{x} |1-2x| \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(x - x^2\right)|1-2x| \mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^{1/2} \left(x - x^2\right)(1-2x)\mathrm{d}x + \int_{1/2}^{1} \left(x-x^2\right)(2x-1)\mathrm{d}x = \frac{1}{16}.$$

Teorema de schimbare de variabilă nu este aplicabilă, deoarece transformarea T nu este biunivocă.

Într-adevăr, dacă prin absurd T ar fi biunivocă

$$\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4} - \alpha\right) = T\left(\alpha, \frac{3}{16} - \alpha\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \alpha\right), \ \forall\, \alpha \in \left[0, \frac{3}{16}\right].$$

Contradicție!

25 Fie funcția $f : D \to \mathbb{R}$; $D = \left\{(x,y) \middle| x^2 + y^2 \le \pi^2\right\}$

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y; \ -\pi \le x \le \pi, \ \sin x \le y \le \sqrt{\pi^2 - x^2}; \\ x-y; \ -\pi \le x \le \pi, \ \sqrt{\pi^2 - x^2} \le y < \sin x. \end{cases}$$

Să se arate că f este integrabilă Riemann pe D şi să se calculeze $\iint_D f$.

Rezolvare. Cum funcția f este discontinuă pe mulțimea

$$D(f) := \left\{(x,y) \middle| -\pi \le x \le \pi, \ y = \sin x\right\},$$

care este neglijabilă Jordan (fiind cu tangenta continuă) rezultă că f este Riemann integrabilă pe D (fiind mărginită pe domeniul D).

$$\iint_D f = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{\sin x}^{\sqrt{\pi^2 - x^2}} (x+y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x + \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\sqrt{\pi^2 - x^2}}^{\sin x} (x-y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \left[x\left(\sqrt{\pi^2 - x^2} - \sin x\right) + \frac{1}{2}\left(\pi^2 - x^2 - \sin^2 x\right) \right] \mathrm{d}x +$$

$$+ \int_{-\pi}^{\pi} \left[x\left(\sin x + \sqrt{\pi^2 - x^2}\right) - \frac{1}{2}\left(\sin^2 x - \pi^2 + x^2\right) \right] \mathrm{d}x = \frac{4\pi^3}{3} - \pi.$$

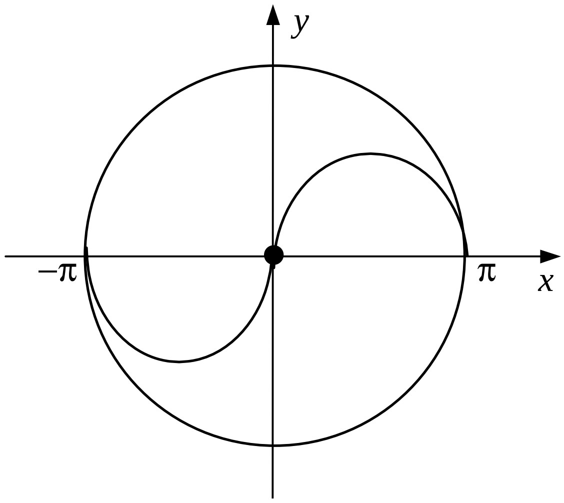


Fig. 6.7

26 Să se calculeze integrala

$$I=\iint_{[0,1]^2}\frac{x}{\left(1+x^2+y^2\right)^{3/2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Rezolvare. Funcția integrant este continuă pe $[0,1]^2$. Dacă din punct de vedere al teoremei Fubini domeniul de integrare fiind simplu în raport cu ambele axe, succesiunea de integrare este indiferentă, din punct de vedere al calculului succesiunea integralelor iterate nu este indiferentă. De pildă, în cazul de față nu este indicat a considera următoarea succesiune:

$$I=\int_0^1\left(\int_0^1\frac{x\mathrm{d}y}{\left(1+x^2+y^2\right)^{3/2}}\right)\mathrm{d}x,$$

deoarece pentru calculul integralei interioare este necesară schimbarea de variabilă $a+b\cdot y^s=t^q$ de la integrala binomă. O relaxare a calculelor este dată de următoarea succesiune:

$$I=\int_0^1\left(\int_0^1\frac{x\mathrm{d}x}{\left(1+x^2+y^2\right)^{3/2}}\right)\mathrm{d}y=\int_0^1\left(\frac{1}{\sqrt{2+y^2}}-\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\right)\mathrm{d}y=$$

$$=\ln\frac{y+\sqrt{1+y^2}}{y+\sqrt{2+y^2}}\Bigg|_0^1=\ln\frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}.$$

27 Să se calculeze integrala

$$I=\iint\limits_{[0,\pi]\times[a,b]}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{y-\cos x},\ 1<a<b,$$

şi apoi să se deducă valoarea integralei cu parametrii

$$J=\int_0^{\pi}\ln\frac{b-\cos x}{a-\cos x}\mathrm{d}x.$$

Rezolvare. Funcţia integrant este continuă pe domeniul de integrare. Mai mult, deoarece domeniul este simplu în raport cu ambele axe, putem folosi teorema lui Fubini în două moduri diferite:

$$I=\int_a^b\left(\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{y-\cos x}\right)\mathrm{d}y=\int_a^b\frac{\pi}{\sqrt{y^2-1}}\mathrm{d}y=\pi\ln\frac{b+\sqrt{b^2-1}}{a+\sqrt{a^2-1}}.$$

Pe de altă parte,

$$I=\int_0^{\pi}\left(\int_a^b\frac{\mathrm{d}y}{y-\cos x}\right)\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\ln\frac{b-\cos x}{a-\cos x}\mathrm{d}x=J.$$

Am determinat astfel valoarea integralei J ca fiind:

$$J=\int_0^{\pi}\ln\frac{b-\cos x}{a-\cos x}\mathrm{d}x=\pi\ln\frac{b+\sqrt{b^2-1}}{a+\sqrt{a^2-1}}.$$

28 Să se calculeze integrala

$$I=\iint\limits_{\left[0,\pi/2\right]\times[0,a]}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{1+y\cdot\cos x},\ 0<a<1,$$

şi apoi să se deducă valoarea integralei cu parametru

$$J=\int_0^{\pi/2}\frac{\ln(1+a\cdot\cos x)}{\cos x}\mathrm{d}x.$$

Rezolvare. Funcţia integrant este continuă pe domeniul de integrare. Mai mult, deoarece domeniul este simplu în raport cu ambele axe, putem folosi teorema lui Fubini în două moduri diferite:

$$I=\int_0^a\left(\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{1+y\cdot\cos x}\right)\mathrm{d}y=\int_0^a\frac{2}{\sqrt{1-y^2}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-y}{1+y}}\,\mathrm{d}y.$$

Folosind schimbarea de variabliă $y=\cos(2\cdot u)$ obținem:

$$I=\frac{\pi^2}{8}-\frac{1}{2}\cdot(\arccos a)^2.$$

Pe de altă parte,

$$I=\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^a\frac{\mathrm{d}y}{1+y\cdot\cos x}\right)\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/2}\frac{\ln(1+a\cdot\cos x)}{\cos x}\mathrm{d}x=J.$$

Am determinat astfel valoarea integralei J ca fiind

$$J=\int_0^{\pi/2}\frac{\ln(1+a\cdot\cos x)}{\cos x}\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{8}-\frac{1}{2}\cdot(\arccos a)^2.$$

Observăm că în integralal J funcția integrant poate fi prelungită prin continuitate. Într-adevăr:

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{\ln(1+a\cdot\cos x)}{\cos x}=a.$$

29 Să se calculeze valoarea integralei

$$I=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\left|x^2+y^2-\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Rezolvare. Ecuația $x^2+y^2-\frac{x+y}{\sqrt{2}}=0$ reprezintă ecuația cercului cu centrul în punctul $\mathrm{P}\left(\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ şi raza $\frac{1}{2}$. Fie D_1 discul corespunzător şi $D_2=D-D_1$, unde $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,\middle|\,x^2+y^2\le 1\right\}$.

Funcția $f(x,y)=x^2+y^2-\frac{x+y}{\sqrt{2}}$ este negativă pe domeniul D_1 şi pozitivă în restul planului. Folosind aditivitatea de domeniu deducem:

$$I=\iint\limits_{D_1}|f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}|f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_{D_1}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

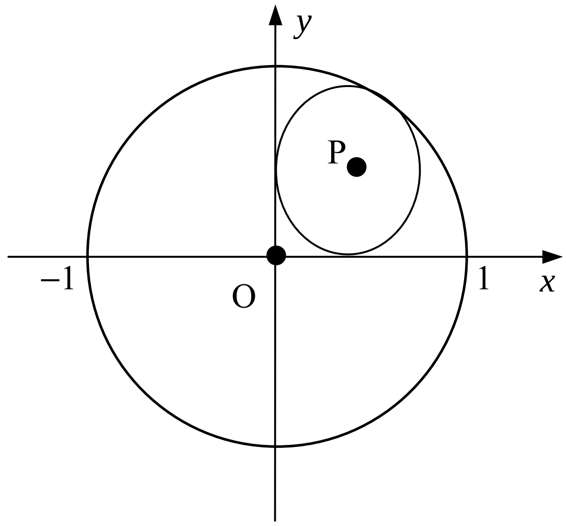


Fig. 6.8

Însă

$$\iint_{D_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

şi astfel

$$I = \iint_{D} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - 2\cdot\iint_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \qquad (\mathbf{6.3})$$

Pentru calculul primei integrale facem schimbarea în coordonate polare:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, & r>0; \\ y = r\sin\theta, & \theta\in[0,2\pi). \end{cases}$$

Folosind teorema de schimbare de variabilă şi teorema Fubini obţinem:

$$\iint_{D} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{(0,1]\times[0,2\pi)} \left[r^2 - \frac{r}{\sqrt{2}}(\cos\theta+\sin\theta)\right] r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2}. \qquad (\mathbf{6.4})$$

Pentru a doua integrală din (**6.3**) facem schimbarea în coordonate polare translatate:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta + \dfrac{\sqrt{2}}{4}, & r>0; \\ y = r\sin\theta + \dfrac{\sqrt{2}}{4}, & \theta\in[0,2\pi). \end{cases}$$

Folosind teorema de schimbare de variabilă şi teorema lui Fubini obţinem

$$\iint_{D} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\left(0,\frac{1}{2}\right]\times[0,2\pi)} \left(r^2 - \frac{1}{4}\right) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = -\frac{\pi}{32}. \qquad (\mathbf{6.5})$$

Înlocuind (**6.4**) şi (**6.5**) în (**6.3**) deducem valoarea integralei $I = \frac{9\pi}{16}$.

30 Să se calculeze integrala

$$\iint_D \left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

unde D este paralelogramul cu laturile $y = x;\ y = x + a;\ y = a$ şi $y = 3a\ (a > 0)$.

Rezolvare.

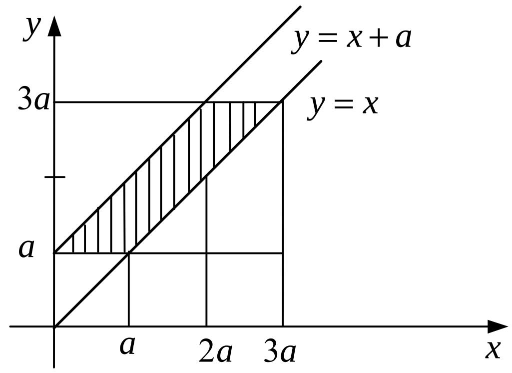


Fig. 6.9

$$\iint_D \left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^a \mathrm{d}x \int_a^{x+a} \left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}y + \int_a^{2a} \mathrm{d}x \int_x^{x+a} \left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}y +$$

$$+ \int_{2a}^{3a} \mathrm{d}x \int_x^{3a} \left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}y = \int_0^a \frac{4x^3 + 3x^2 a + 3xa^2}{3} \mathrm{d}x +$$

$$+ \int_a^{2a} \frac{6x^2 a + 3xa^2 + a^3}{3} \mathrm{d}x + \int_{2a}^{3a} \frac{9x^2 a - 4x^3 + 27a^3}{3} \mathrm{d}x = 14a^4.$$

31 Să se calculeze integrala

$$\iint_D y \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \text{ unde } D = \left\{(x, y) \middle|\, y \le x^2,\ x^2 + y^2 \le 2\right\}.$$

Rezolvare.

$$y + y^2 = 2 \Leftrightarrow y^2 + y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = 1 \text{ şi } y = -2.$$

Dar $y \ge 0 \Rightarrow y = 1$ soluție acceptabilă $y = x^2 \Rightarrow x = \pm 1$.

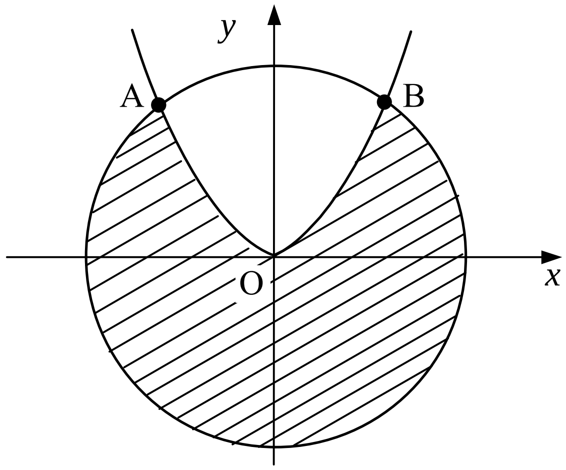


Fig. 6.10

Deci $\mathrm{A}(-1,1)$ şi $\mathrm{B}(1,1)$

$$\iint_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-\sqrt{2}}^{-1}\left(\int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} y\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x + \int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{2-x^2}}^{x^2} y\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x +$$

$$+\int_{1}^{\sqrt{2}}\left(\int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} y\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(x^4 + x^2 - 2\right)\mathrm{d}x = -\frac{7}{15}.$$

Folosind aditivitatea de domeniu se putea calcula astfel:

$$\iint_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} y\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x - \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\left(\int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} y\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = -\frac{7}{15}.$$

Să se schimbe ordinea de integrare în următoarele integrale iterate:

32 $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_{-\cos x}^{\cos x} f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$

Rezolvare.
Domeniul D este determinat de inegalităţile

$$D = \left\{(x,y)\middle| -\cos x \le y \le \cos x, -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}\right\}.$$

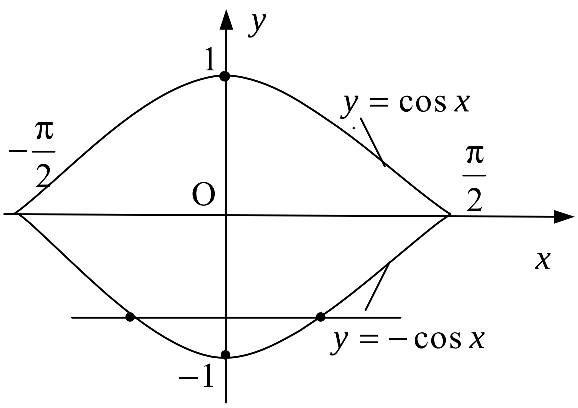


Fig. 6.11

În aceste condiții:

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}y = \int_{-1}^{0}\left(\int_{\arccos y-\pi}^{\pi-\arccos y} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y + \int_{0}^{1}\left(\int_{-\arccos y}^{\arccos y} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$$

33 $\int_1^2\left(\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$.

Rezolvare. Domeniul de integrare este determinat de inegalitățile:

$$D=\left\{(x,y)\middle| y\geq 2-x,\ y^2+(x-1)^2\leq 1\right\}.$$

În aceste condiții $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1\left(\int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$.

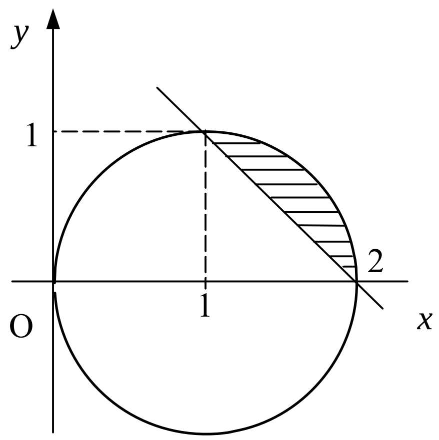


Fig. 6.12

34 $\int_0^1 \left(\int_0^{2x} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x + \int_1^2 \left(\int_{1-\sqrt{2x-x^2}}^{1+\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$.

Rezolvare.

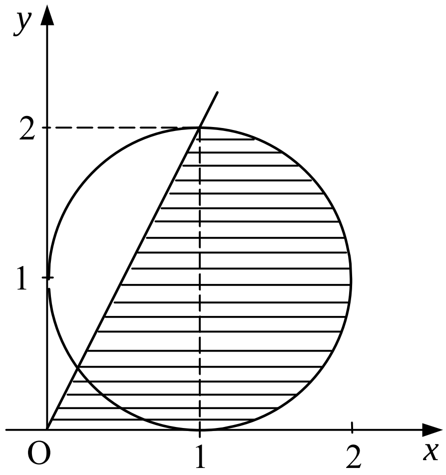


Fig. 6.13

Domeniul de integrare este determinat de reuniunea domeniilor

$$D_1 = \{(x,y) \mid x \in [0,1],\ 0 \le y \le 2x\} \quad \text{şi}$$

$$D_2 = \{(x,y) \mid x \in [1,2],\ (x-1)^2 + (y-1)^2 \le 1\}.$$

În aceste condiții:

$$\iint_{D=D_1 \cup D_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^2 \left(\int_{\frac{y}{2}}^{1+\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

35 Să se calculeze integrala

$$\int_0^1 \left(\int_{\arcsin y}^{\arcsin \sqrt{y}} \frac{xy}{\sin x}\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

Rezolvare.

Deoarece funcția $\dfrac{x}{\sin x}$ nu admite o primitivă exprimabilă cu ajutorul unei combinații finite de funcții elementare, integrala se va calcula prin schimbarea ordinii de integrare

$$D=\left\{(x,y)\middle|\, x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\sin^2 x\le y\le\sin x\right\},$$

$$\iint\limits_D \frac{xy}{\sin x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{y^2}{2}\Bigg|_{\sin^2 x}^{\sin x}\mathrm{d}x=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{2}\left(\sin x-\sin^3 x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left[1-\frac{7}{9}\right]=\frac{1}{9}.$$

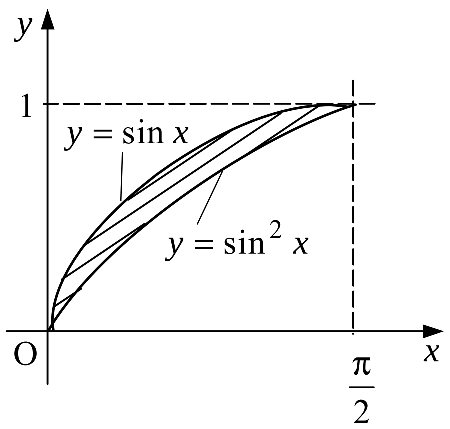


Fig. 6.14

36 Să se calculeze integrala

$$\int_{-1}^{0}\left(\int_{-y^2}^{\sqrt[3]{-y^2}} y\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y.$$

Rezolvare.

Deoarece funcția e^{x^2} nu admite o primitivă exprimabilă prin funcții elementare, vom calcula integrala schimbând ordinea de integrare. Integrala considerată se transformă în $\iint\limits_D y\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, unde domeniul D este definit de inegalitățile $D=\left\{(x,y)\middle|\, x\in[-1,0] \text{ şi } -\sqrt{-x^3}\le y\le-\sqrt{-x}\right\}$. Domeniul fiind simplu în raport cu ambele axe, vom obține egalitatea:

$$\iint_D y\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-1}^{0} \mathrm{e}^{x^2} \left.\frac{y^2}{2}\right|_{-\sqrt{-x^3}}^{-\sqrt{-x}} \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} \mathrm{e}^{x^2}\left(-x + x^3\right)\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} x^3\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} x\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}}{4} - \frac{1}{2}.$$

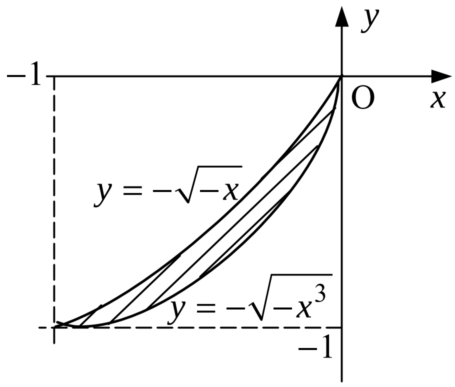


Fig. 6.15

37 Să se calculeze integrala

$$\iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

unde

$$D = \left\{(x, y)\middle|\, ax \le x^2 + y^2 \le 2ax,\ y \ge 0,\ a > 0\right\}.$$

Rezolvare.

Utilizând transformarea în coordonate polare

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta,\ \rho \in [0, \infty); \\ y = \rho\sin\theta,\ \theta \in [-\pi, \pi], \end{cases}$$

domeniul D devine

$$\Delta = \left\{(\rho, \theta)\middle|\, \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ \rho \in [a\cos\theta, 2a\cos\theta]\right\}.$$

Jacobianul transformării fiind egal cu ρ rezultă că:

$$\iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_\Delta \rho\cdot\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_{a\cos\theta}^{2a\cos\theta} \rho^2\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\theta =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{8a^3\cos^3\theta - a^3\cos^3\theta}{3}\mathrm{d}\theta = \frac{7}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\mathrm{d}\theta = \frac{7}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1 - \sin^2\theta\right)\cos\theta\mathrm{d}\theta = \frac{14}{9}.$$

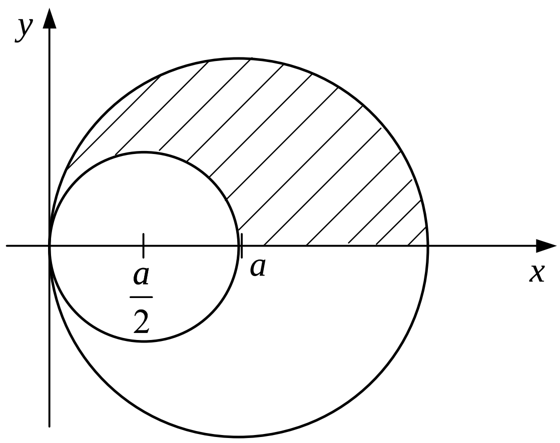


Fig. 6.16

38 Să se calculeze integrala $\iint_D \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, unde

$$D=\left\{(x,y)\,\middle|\,x^2+y^2\ge 1,\ x^2+y^2\le 9,\ y\ge \frac{x}{\sqrt{3}},\ y\le x\sqrt{3}\right\}.$$

Rezolvare. Utilizând transformarea în coordonate polare

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta,\ \rho\in[0,\infty); \\ y=\rho\sin\theta,\ \theta\in[0,2\pi), \end{cases}$$

domeniul D devine

$$\Delta=\left\{(\rho,\theta)\,\middle|\,\rho\in[1,3],\theta\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]\right\}.$$

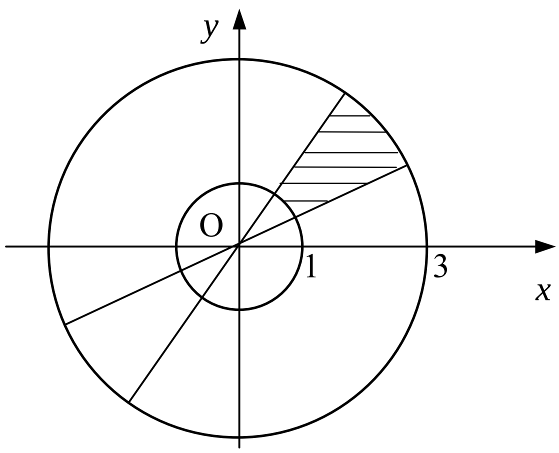


Fig. 6.17

În aceste condiții:

$$\iint_D \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\int_1^3 \operatorname{arctg}\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\rho\cdot\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\theta =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\theta\cdot\frac{1}{2}(9-1)\mathrm{d}\theta = 4\frac{\theta^2}{2}\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi^2}{6}.$$

39 Determinați coordonatele centrului de greutate al unei plăci omogene limitată de curba $y=\sin x$ şi dreapta OA $\left(\mathrm{O}=(0,0)\text{ şi }\mathrm{A}=\left(\frac{\pi}{2},1\right)\right)$.

Rezolvare.

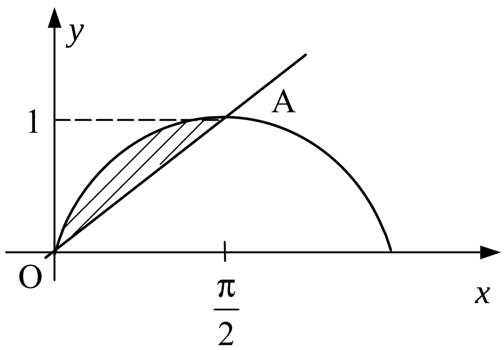


Fig. 6.18

Coordonatele centrului de greutate se calculează cu formulele:

$$x_G = \frac{\iint_D x\cdot\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint_D \rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y};\quad y_G = \frac{\iint_D y\cdot\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint_D \rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y}$$

$$\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_{\frac{2}{\pi}x}^{\sin x}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin x - \frac{2}{\pi}x\right)\mathrm{d}x =$$

$$= -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{\pi}x^2\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1-\frac{\pi}{4} = \frac{4-\pi}{4}.$$

$$\iint_D x\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_{\frac{2}{\pi}x}^{\sin x} x\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(x\sin x - \frac{2}{\pi}x^2\right)\mathrm{d}x = \frac{12-\pi^2}{12}.$$

$$\iint_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_{\frac{2}{\pi}x}^{\sin x} y\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin^2 x}{2} - \frac{2x^2}{\pi^2}\right)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{24}.$$

Rezultă deci

$$x_{\mathrm{G}} = \frac{12-\pi^2}{\cancel{12}}\cdot\frac{\cancel{4}}{4-\pi} = \frac{12-\pi^2}{3(4-\pi)};$$

$$y_{\mathrm{G}} = \frac{\pi}{\underset{6}{\cancel{24}}}\cdot\frac{\cancel{4}}{4-\pi} = \frac{\pi}{6(4-\pi)}.$$

40 Fie lemniscata $\rho^2 = 2a^2\cos 2\theta$. Să se calculeze aria porțiunii dintr-o buclă a lemniscatei situată în exteriorul discului $\rho = a,\ a \in \mathbb{R}_+^*$.

Rezolvare.

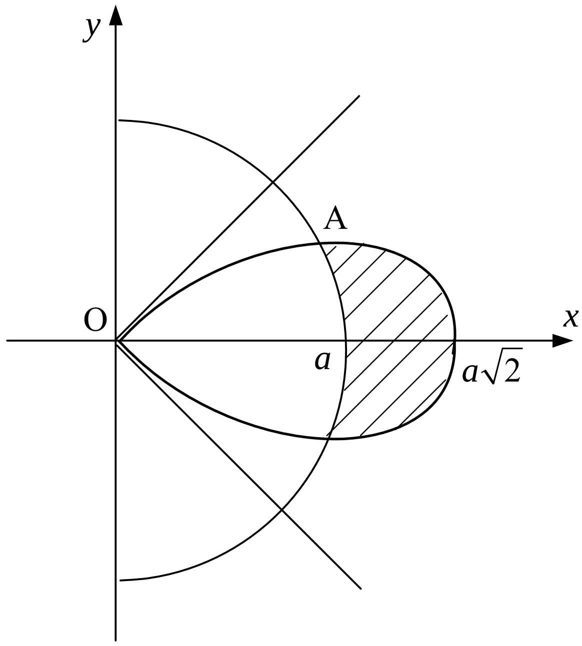


Fig. 6.19

Calculăm coordonatele punctului de intersecție

$$a^2 = 2a^2\cos^2\theta \Rightarrow \cos 2\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}.$$

Aria cerută se va calcula cu formula

$$A=\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(\int_a^{a\sqrt{2\cos 2\theta}}\rho\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(2a^2\cos 2\theta-a^2\right)\mathrm{d}\theta=$$

$$=2a^2\left.\frac{\sin 2\theta}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{6}}-a^2\frac{\pi}{6}=a^2\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi a^2}{6}=a^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}\right).$$

41 Să se calculeze integrala

$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, unde $D=\left\{ax\le x^2+y^2\le 2ax;\ 0\le y\le x,\ a>0\right\}$.

Rezolvare.

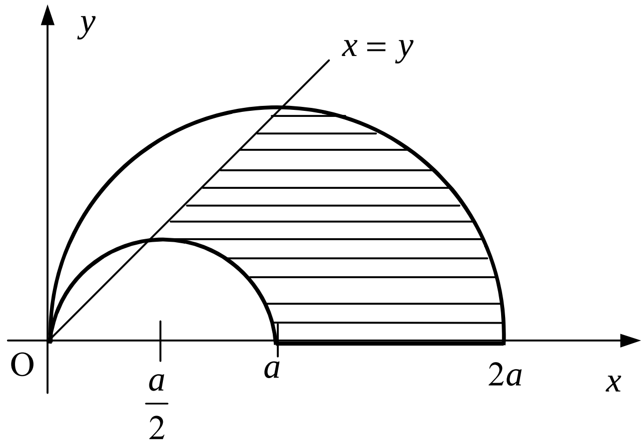


Fig. 6.20

Trecând la coordonate polare

$$\begin{cases}x=\rho\cos\theta;\\ y=\rho\sin\theta,\end{cases}\quad \rho\in[0,\infty);\ \theta\in[0,2\pi),$$

vom obține relațiile

$$x^2+y^2\ge ax\Leftrightarrow \rho\ge a\cos\theta$$

$$x^2+y^2\le 2ax\Leftrightarrow \rho\le 2a\cos\theta;\ y\in[0,x]\Leftrightarrow \theta\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$$

şi integrala va deveni

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_{a\cos\theta}^{2a\cos\theta}\rho\cdot\rho\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{3}\left(8a^3\cos^3\theta-a^3\cos^3\theta\right)\mathrm{d}\theta=$$

$$=\frac{7a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^3\theta\mathrm{d}\theta=\frac{35\sqrt{2}a^3}{36}.$$

42 Să se calculeze aria domeniului

$$D=\left\{(x,y)\,\middle|\, x^2+y^2\le ax,\ x^2+y^2\le ay,\ a>0\right\}.$$

Rezolvare. Trecând la coordonatele polare

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta; \\ y=\rho\sin\theta, \end{cases} \quad \rho\in[0,\infty);\ \theta\in[-\pi,\pi],$$

vom obține relațiile $\rho\le a\cos\theta,\ \rho\le a\sin\theta$.

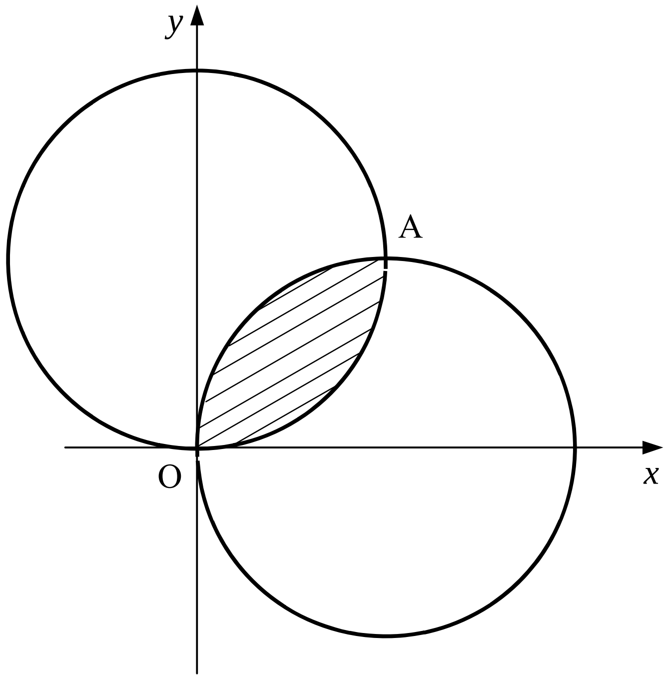


Fig. 6.21

Punctul de intersecție A va avea coordonatele $x=y=\dfrac{a}{2}$.

În aceste condiții aria domeniului D va fi dată de formula

$$A(D)=\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_0^{a\sin\theta}\rho\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\theta+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{a\cos\theta}\rho\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\theta=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{a^2\sin^2\theta}{2}\mathrm{d}\theta+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{a^2\cos^2\theta}{2}\mathrm{d}\theta=\frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)=\frac{a^2(\pi-2)}{8}.$$

43 Să se calculeze $\iint\limits_D \frac{1}{\sqrt[3]{5-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, dacă

$$D=\left\{(x,y)\,\middle|\,1\le\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 4;\ a,b>0\right\}.$$

Rezolvare.

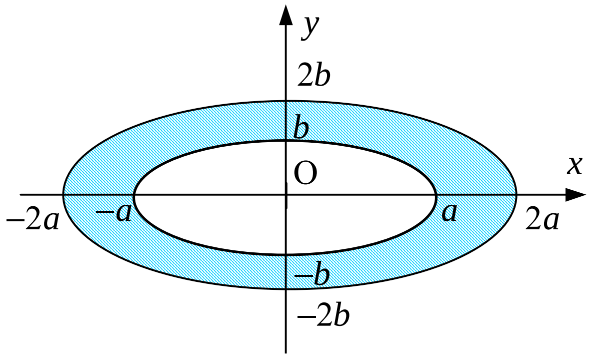


Fig. 6.22

Trecând la coordonate polare generalizate

$$\begin{cases} x=a\rho\cos\theta; \\ y=b\rho\sin\theta, \end{cases}\quad \rho\in[1,2];\ \theta\in[0,2\pi]$$

(Jacobianul transformării este $ab\rho$), integrala devine:

$$\int_0^{2\pi}\int_1^2\frac{1}{\sqrt[3]{5-\rho^2}}ab\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=ab(2\pi)\cdot\left(\frac{-3}{4}\right)\left(5-\rho^2\right)^{2/3}\Big|_1^2=\frac{3\pi ab}{2}\left(\sqrt[3]{16}-1\right).$$

44 Să se calculeze $\iint_D\sqrt{a^2-\left(\frac{x^2+y^2}{2x}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, dacă D este interiorul cercului $x^2+y^2-2ax=0$, $a>0$.

Rezolvare. Trecând la coordonate polare

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta; \\ y=\rho\sin\theta, \end{cases}\quad \rho\in[0,\infty);\ \theta\in[-\pi,\pi),$$

domeniul D devine

$$\Delta=\left\{(\rho,\theta)\,\middle|\,\rho\in[0,2a\cos\theta],\ \theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\right\}$$

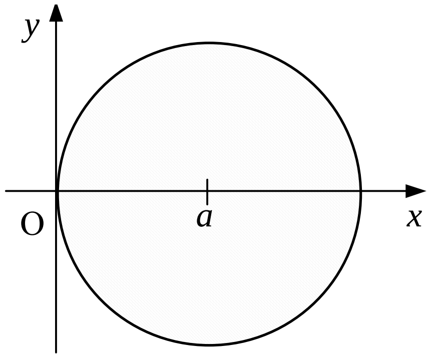


Fig. 6.23

$$\iint_D \sqrt{a^2 - \left(\frac{x^2+y^2}{2x}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Delta} \sqrt{a^2 - \left(\frac{\rho}{2\cos\theta}\right)^2} \cdot \rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2a\cos\theta} \frac{1}{2\cos\theta} \sqrt{4a^2\cos^2\theta - \rho^2}\,\rho\mathrm{d}\rho \right) \mathrm{d}\theta =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2\cos\theta} \left(\frac{-1}{3}\right) \left(4a^2\cos^2\theta - \rho^2\right)^{3/2} \Big|_0^{2a\cos\theta} \mathrm{d}\theta =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{6\cos\theta} 8a^3\cos^3\theta\mathrm{d}\theta = \frac{4a^3}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \mathrm{d}\theta = \frac{2a^3\pi}{3}.$$

6.3 TEMĂ DE CONTROL

1. Funcția $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{dacă } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

este integrabilă?

Răspuns. Integrabilă (are un singur punct de discontinuitate).

2. Să se arate că $f : [-1,1] \times [-1,1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{\left(x^2 + y^2\right)^2}, & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{dacă } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

nu este integrabilă.

Răspuns. Nu este mărginită.

3. Să se calculeze ariile domeniilor plane:

$$D=\left\{(x,y)\middle|\,\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1\right\}.$$

Răspuns. πab.

4. $D=\left\{(x,y)\middle|\,1\le x^2+y^2\le 9,\ x\le y\le 3x\right\}$.

Răspuns. $\frac{4\pi}{3}$.

Să se calculeze următoarele integrale duble:

5. $\iint\limits_D x\sin(xy)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, unde $D=[0,1]\times[0,\pi]$.

Răspuns. 1.

6. $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, unde

$$D=\left\{(x,y)\middle|\,x\in[1,2],\ \frac{1}{x}\le y\le x\right\}.$$

Răspuns. $\frac{9}{4}$.

7. $\iint\limits_D \left(x^2+y^2-4x-4y+10\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, unde

$$D=\left\{(x,y)\middle|\,x^2+4y^2-2x-16y+13\le 0\right\}.$$

Răspuns. $\frac{17\pi}{2}$.

8. $\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, unde $D=\left\{(x,y)\middle|\,x^2+y^2\le x\right\}$.

Răspuns. $\frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)$.

9. $\iint\limits_D \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, unde

$$D=\left\{(x,y)\middle|\frac{1}{4}\le\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1,\ x\ge 0, a,b>0\right\}.$$

Răspuns. $\frac{\pi ab\sqrt{3}}{4}$.

10. Să se calculeze integrala dublă

$$I=\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

unde D domeniul delimitat de dreptele

$$y=x,\ y=x+a,\ y=a,\ y=3a\ \ (a>0).$$

Răspuns. $14a^4$.

11. Să se calculeze volumul corpului mărginit de suprafețele:

$$z=0,\ x^2+y^2=1,\ x+y+z=3.$$

Răspuns. 3π.

12. Să se calculeze volumul corpului mărginit de suprafețele:

$$z=xy^2,\ x^2+y^2=R^2,\ y=0,\ x=0,$$

aflat în primul cadran.

Răspuns. $\frac{R^5}{15}$.

13. Să se calculeze masa unei plăci plane de grosime neglijabilă dacă densitatea $\rho(x,y)=x^2+y^2$, iar $D=\left\{(x,y)\middle|1\le\frac{x^2}{4}+y^2\le 4\right\}$.

Răspuns. $\frac{75\pi}{2}$.

14. Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al unei plăci plane de grosime neglijabilă cu densitatea $\rho(x,y)=y$ şi care are forma dată de domeniul

$$D=\left\{(x,y)\middle|\, x+y\le 2,\ y\ge x^2\right\}.$$

Răspuns. $x_{\mathrm{G}}=-\dfrac{25}{32},\ y_{\mathrm{G}}=\dfrac{235}{112}$.

15. Să se afle momentul de inerţie în raport cu axa O*x* a triunghiului delimitat de dreptele $x=2,\ y=2,\ x+y-2=0$.

Răspuns. 4.

16. Dacă $u:[a_1,b_1]\to\mathbb{R}_+$ şi $v:[a_2,b_2]\to\mathbb{R}_+$ sunt integrabile, atunci:

(i) $f:[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\to\mathbb{R}$ $f(x,y)=u(x)+v(y)$ este Darboux integrabilă pe *D* şi

$$\iint\limits_D f=(b_2-a_2)\int_{a_1}^{b_1}u+(b_1-a_1)\int_{a_2}^{b_2}v\ ;$$

(ii) $g=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\to\mathbb{R}$, $g(x,y)=u(x)v(y)$ este Darboux integrabilă pe *D* şi

$$\iint\limits_D g=\left(\int_{a_1}^{b_1}u\right)\cdot\left(\int_{a_2}^{b_2}v\right).$$

17. (i) Fie $f:[0,1]\times[0,1]\to\mathbb{R}$

$$f(x,y)=\begin{cases}1,\ x\in[0,1]\cap(\mathbb{R}-\mathbb{Q})\cup\{0\}\ \text{ sau }\ y\in(\mathbb{R}-\mathbb{Q})\cap[0,1];\\[4pt] 1-\dfrac{1}{q},\ x,y\in[0,1]\cap\mathbb{Q},\ x=\dfrac{p}{q},\ p,q\in\mathbb{N}^*,\ (p,q)=1.\end{cases}$$

Să se arate că f este Darboux integrabilă pe $[0,1]^2$.

(ii) Dacă $f^{(x)}:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f^{(x)}(y)=f(x,y),\ \forall\, x\in[0,1], y\in[0,1]$ să se arate că $f^{(x)}$ nu este integrabilă pe $[0,1],\ \forall\, x\in\mathbb{Q}\cap[0,1]$.

18. Fie mulţimea

$$G=\left\{(x,y)\in[0,1]^2\cap\mathbb{Q}^2\,\middle|\, x=\frac{m}{n},\ y=\frac{m'}{n},\ m,m',n\in\mathbb{N},\ n\ne 0 \text{ şi } (m,n)=1=(m',n)\right\}$$

şi funcţia $g:[0,1]^2 \to \mathbb{R}$

$$g(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)\in G;\\ 0, & (x,y)\in[0,1]^2-G.\end{cases}$$

(i) Să se arate că g nu este integrabila Darboux pe $[0,1]^2$.

(ii) Dacă $y\in[0,1]\cap\mathbb{Q}$, $y=\dfrac{m}{n}$; $m,n\in\mathbb{N}$, $n\neq 0$, $(m,n)=1$,

iar

$$g_y(x)=\begin{cases}1, & x=\dfrac{k}{n},\ (k,n)=1, k\le n;\\ 0, & x\in[0,1]-\left\{x=\dfrac{k}{n}\,\middle|\,(k,n)=1, k\le n\right\},\end{cases}$$

să se arate că g_y este integrabilă pe $[0,1]$ şi $\int_0^1 g_y=0$.

19. Fie $f:D\to\mathbb{R}$, $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2+y^2\le 2y,\ y+x^2\le 2\right\}$

$$f(x,y)=\frac{xy}{1+x^2+y^2}.$$

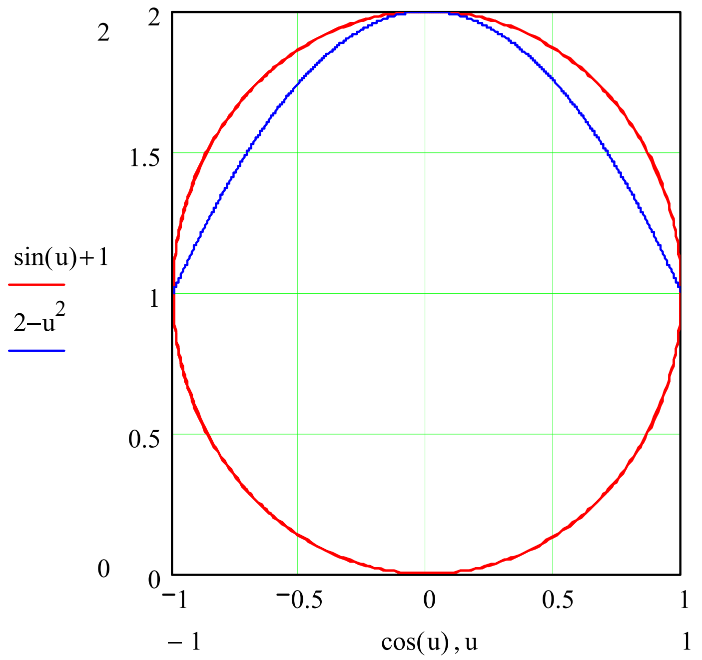


Fig. 6.24

Să se arate că f este integrabilă pe D şi $\iint\limits_D f = 1 - \frac{5}{8}\ln 3$.

20. Fie $f:[0,1]^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y)=\begin{cases} 1, \text{ dacă } (x,y)\in\left(\left(\mathbb{Q}\cap[0,1]\right)\times\left[0,\frac{1}{2}\right]\right)\cup\left(\left((\mathbb{R}-\mathbb{Q})\cap[0,1]\right)\times\left[\frac{1}{2},1\right]\right); \\ 0, \text{ dacă } (x,y)\in\left(\left(\mathbb{Q}\cap[0,1]\right)\times\left[\frac{1}{2},1\right]\right)\cup\left(\left((\mathbb{R}-\mathbb{Q})\cap[0,1]\right)\times\left[0,\frac{1}{2}\right]\right). \end{cases}$$

Să se demonstreze că f nu este integrabilă Riemann pe $[0,1]^2$, există $\int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$, dar nu există $\int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$.

21. Să se arate că mulţimea

$$E=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, \left(x^2+y^2\right)^2 \le a^2\left(x^2-y^2\right)\right\},\ a\neq 0$$

are arie şi să se determine aria sa.

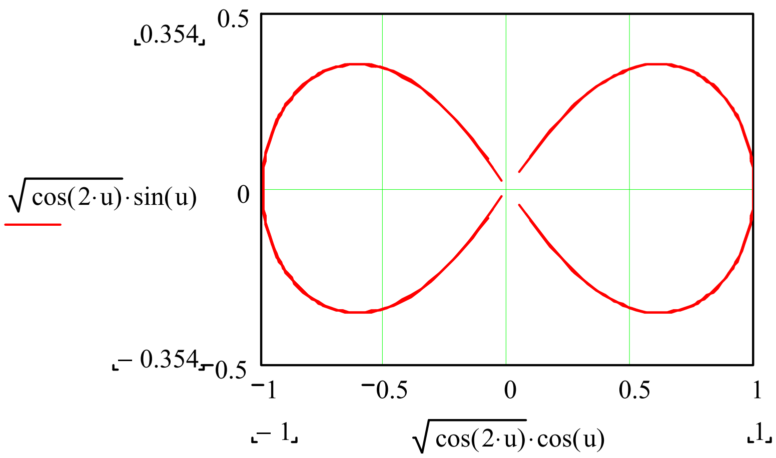


Fig. 6.25

Răspuns. aria $E = a^2$.

22. Să se arate că transformarea

$$T=\begin{cases} u = x+y \\ v = xy \end{cases},\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2$$

aplică domeniul $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, xy\geq 1,\ x+y\leq 4,\ y\geq 0\right\}$ pe domeniul

$$\Delta=\left\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, 2\leq u\leq 4,\ 1\leq v\leq \frac{u^2}{4}\right\}.$$

Să se arate că:

$$\iint_{\Delta}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\neq\iint_{D}\left|\frac{D(u,v)}{D(x,y)}\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

şi să se explice de ce nu este aplicabilă teorema de schimbare de variabilă.

Răspuns. *T* nu este biunivocă.

23. Să se calculeze, trecând la coordonate polare generalizate, integrala dublă:

$$I=\iint_{D}|xy|\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

unde:

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2\leq\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2},\ x\geq 0\right\};\ a,b\in\mathbb{R}_+^*.$$

Răspuns. $\dfrac{a^2b^2}{24}$.

24. Fie funcţia continuă $f:[1,2]\to\mathbb{R}$ şi domeniul

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{x}{2}\leq x^2+y^2\leq x,\ \frac{y}{2}\leq x^2+y^2\leq y\right\}.$$

Folosind o schimbare de variabile adecvată să se arate că transformarea este regulată şi că:

$$\iint_{D}\frac{1}{\left(x^2+y^2\right)^2}f\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)f\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\left(\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x\right)^2.$$

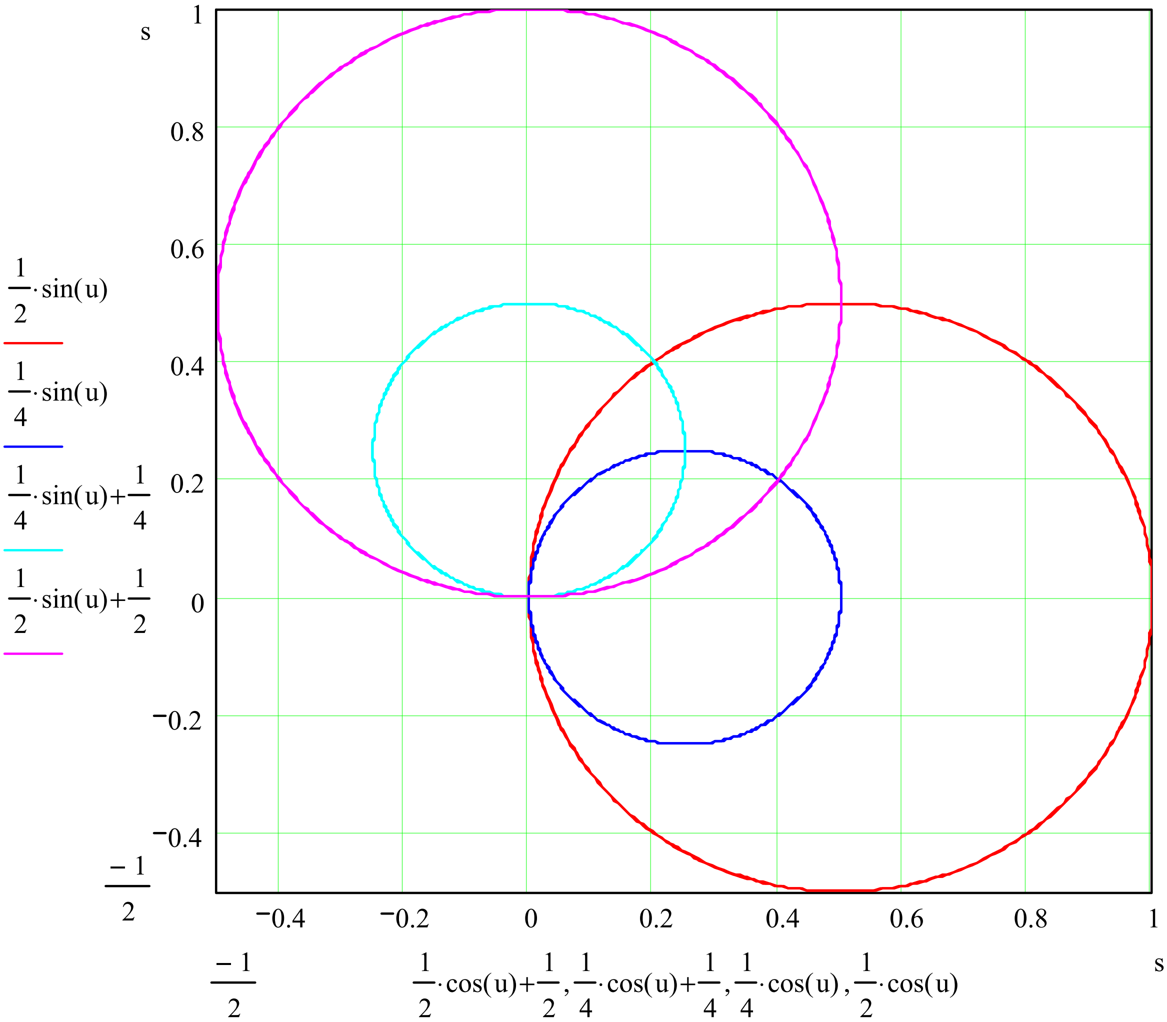


Fig. 6.27

25. Să se calculeze coordonatele centrului de greutate, momentele statice şi momentele de inerţie ale plăcii omogene

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2+y^2\le a^2,\ x^2+y^2\ge ax,\ y\ge 0\right\},\ a>0.$$

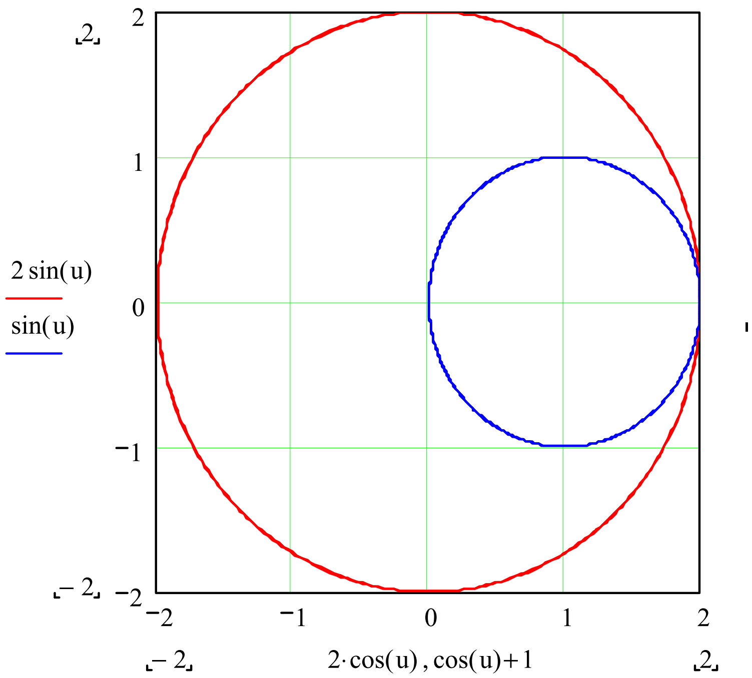


Fig. 6.27

Răspuns.

$$\begin{cases} x_G = -\dfrac{a}{6}; \quad J_x = \dfrac{15}{128}\pi a^4; \\ J_G = \dfrac{14}{9\pi}a; \quad J_y = \dfrac{11}{128}\pi a^4; \\ S_x = \dfrac{7}{12}a^3; \quad J_{xy} = -\dfrac{1}{24}a^4; \\ S_y = -\dfrac{\pi}{16}a^3. \end{cases}$$

26. Fie funcţia $f : D \to \mathbb{R}$; $D = \left\{ (x, y) \middle| x^2 + y^2 \le \left(3\pi/2\right)^2 \right\}$

$$f(x,y) = \begin{cases} x + y; \ -3\pi/2 \le x \le 3\pi/2, \ \cos x \le y \le \sqrt{\left(3\pi/2\right)^2 - x^2}; \\ x - y; \ -3\pi/2 \le x \le 3\pi/2, \ \sqrt{\left(3\pi/2\right)^2 - x^2} \le y < \cos x. \end{cases}$$

Să se arate că f este integrabilă Riemann pe D şi să se calculeze $\iint_D f$.

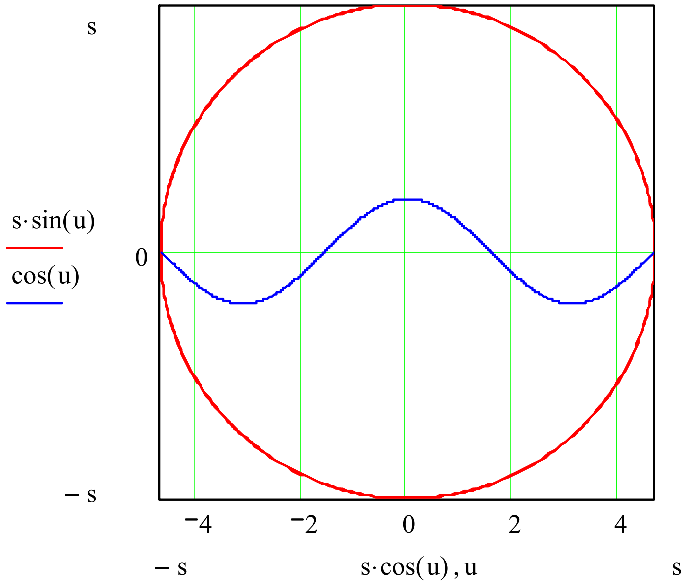


Fig. 6.28

Răspuns. $\frac{3}{2}\cdot\pi\cdot\left(3\pi^2-1\right)$.

Să se calculeze următoarele integrale:

27. $\iint_D (1-y)\,dxdy$ dacă

$$D=\left\{(x,y)\middle|\, x^2+(y-1)^2\le 1,\ y\le x^2,\ x\ge 0\right\}.$$

Răspuns. $\frac{1}{15}$.

28. $\int_0^1\left(\int_{\arcsin y}^{\arcsin\sqrt{y}}\frac{x}{\sin x}dx\right)dy$.

Răspuns. Se va schimba ordinea de integrare, $I=\frac{\pi^2}{8}-1$.

29. $\iint_D \arcsin\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2\pi}dxdy$ dacă

$$D=\left\{(x,y)\middle|\,\pi^2\le x^2+y^2\le(2\pi)^2\right\}.$$

Răspuns. $\pi^3\left(\frac{7}{6}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

30. $\iint_D \dfrac{y^2}{x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ dacă

$$D=\left\{(x,y)\middle|1\le x^2+y^2\le 2x\right\}.$$

Răspuns. $\pi-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

31. $\iint_D \arccos\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ dacă

$$D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\ge 1,\ x\ge\frac{1}{\sqrt{2}},\ x+y\le\sqrt{2},\ x-y\le\sqrt{2}\right\}.$$

Răspuns. $\dfrac{1}{2}\ln 2-\dfrac{\pi^2}{32}$.

32. $\iint_D |xy|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ dacă

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\middle|\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2\le\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2},\ x\ge 0\right\},\ a,b\in\mathbb{R}_+^*.$$

Răspuns. $\dfrac{a^2b^2}{24}$.

33. $\displaystyle\int_0^R\left(\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\ln\left(1+x^2+y^2\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$, dacă $R>0$.

Răspuns. $\dfrac{\pi}{4}\left[\left(1+R^2\right)\ln\left(1+R^2\right)-R^2\right]$.

34. Să se calculeze aria domeniului plan limitat de curba

$$\left(x^2+y^2\right)^2=2ax^3.$$

Răspuns. $\dfrac{5}{8}\pi a^2$.

35. Să se calculeze aria figurii limitate de curbele

$$x^2+y^2=2x;\ x^2+y^2=4x;\ y=x\ \text{şi}\ y=0.$$

Răspuns. Se trece la coordonate polare, $A = 3\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right)$.

36. Să se calculeze integrala $\iint_S e^{\frac{x}{y}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, dacă S este un triunghi curbiliniu mărginit de parabola $y^2 = x$ şi dreptele $x = 0,\ y = 1$.

Răspuns. $\frac{1}{2}$.

37. Să se calculeze integrala

$$\iint_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dacă domeniul D este limitat de elipsa,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ a, b \in \mathbb{R}_+^*.$$

Răspuns. $\frac{2}{3}\pi ab$.

38. Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al unui sector circular omogen de rază a şi unghi la vârf 2α.

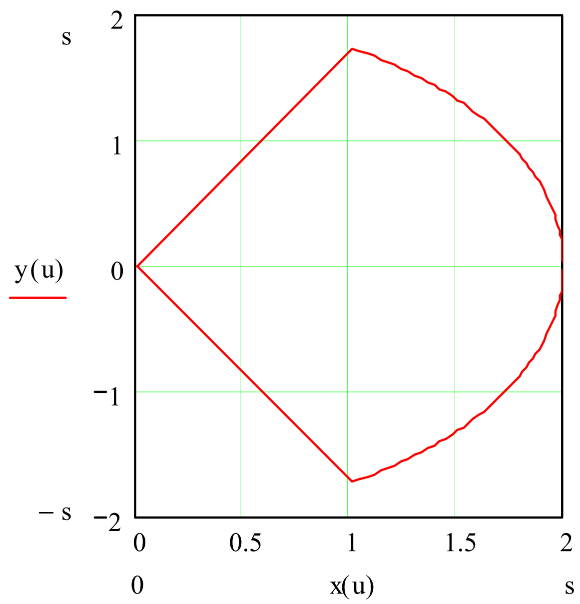


Fig. 6.29

Răspuns. $\begin{cases} x_G = \dfrac{2a\sin\alpha}{3\alpha}; \\ y_G = 0. \end{cases}$

39. Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al unei plăci omogene limitată de curbele $x^2 = ay,\ x + y = 2a,\ a > 0$.

Răspuns. $\begin{cases} x_G = -\dfrac{a}{2}; \\ y_G = \dfrac{8}{5}a. \end{cases}$

40. Să se calculeze aria domeniului plan limitat de curbele

$$xy = a^2;\ x + y = \frac{5}{2}a,\ a > 0.$$

Răspuns. $\dfrac{15}{8} - 2\ln 2$.

MODULUL 8

INTEGRALA TRIPLĂ

7.1 BREVIAR TEORETIC

Fie V o mulțime compactă din $\mathbb{R}^3$, astfel încât $V \subset [a,b]\times[c,d]\times[e,g]$. Frontiera domeniului V este o reuniune de suprafețe netede. Să considerăm diviziunile

$$\delta = (a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b),$$
$$\overline{\delta} = (c = y_0 < y_1 < \ldots < y_m = d),$$
$$\overline{\overline{\delta}} = (x = z_0 < z_1 < \ldots < t_p = g)$$

ale intervalelor $[a,b]$, $[c,d]$, $[e,g]$. Planele paralele cu planele zOz, zOx, xOy duse prin punctele diviziunilor $\delta, \overline{\delta}, \overline{\overline{\delta}}$ împart paralelipipedul $[a,b]\times[c,d]\times[e,g]$ în $n\times m\times p$ paralelipipede de forma:

$$I_{ijk} = [x_{i-1}, x_i]\times[y_{j-1}, y_j]\times[z_{k-1}, z_k,],\ 1\le i\le n,\ 1\le j\le m,\ 1\le k\le p.$$

Să notăm cu Δ mulțimea paralelipipedelor conținute în V sau care au puncte comune cu V.

Definiția 7.1. Vom numi diviziune a domeniului V mulțimea paralelipipedelor $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_r$ din Λ şi o vom nota:

$$\Delta = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_r),\ r = n\times m\times \rho,$$

ordinea de numerotare fiind arbitrară. Norma diviziunii Δ este egală cu

$$\|\Delta\| = \max_{1\le i\le n,\, 1\le j\le m.\, 1\le k\le p}\{x_i - x_{i-1}, y_j - y_{j-1}, z_k - z_{k-1}\} = \max\left\{\|\delta\|, \|\overline{\delta}\|, \|\overline{\overline{\delta}}\|\right\}.$$

Să considerăm diviziunile $\delta, \overline{\delta}, \overline{\overline{\delta}}$ ale intervalelor $[a,b]\times[c,d]\times[e,g]$, care sunt mai fine decât $\delta, \overline{\delta}, \overline{\overline{\delta}} \supset \delta, \overline{\delta}' \supset \overline{\overline{\delta}}$. Acestor diviziuni le corespunde o diviziune Δ' a domeniului V care este mai fină decât Δ şi $\|\Delta'\| \le \|\Delta\|$, deoarece

$$\|\delta'\| \le \|\delta\|,\quad \|\overline{\delta}'\| \le \|\overline{\delta}'\|,\quad \|\overline{\overline{\delta}}'\| \le \|\overline{\overline{\delta}}\|.$$

Fie $f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ o funcție mărginită. Notăm cu

$$m_k = \inf\left\{ f(x,y,z) \middle| (x,y,z) \in \delta_k \right\},\ 1 \le k \le r,$$
$$M_k = \sup\left\{ f(x,y,z) \middle| (x,y,z) \in \delta_k \right\},\ 1 \le k \le r,$$

şi cu υ_k volumul paralelipipedului δ_k, $1 \le k \le r$. Definim

$$s_\Delta(f) = \sum_{k=1}^{r} m_k \cdot \upsilon_k; \quad S_\Delta(f) = \sum_{k=1}^{r} M_k \cdot \upsilon_k$$

suma Darboux inferioară, respectiv suma Darboux superioară asociată funcției f şi diviziunii Δ.

Sumele Darboux $s_\Delta(f)$ şi $S_\Delta(f)$ aproximează prin lipsă, respectiv prin adaos, masa unui corp neomogen de densitate variabilă $f(x,y,z) \ge 0$ şi de volum *V*.

Fie $(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \in \delta_k$, $1 \le k \le r$, un sistem de puncte intermediare asociat diviziunii Δ a domeniului *V*. Numărul real

$$\sigma_\Delta(f, \xi_k, \eta_k, \zeta_k) = \sum_{k=1}^{r} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \cdot \upsilon_k$$

se numeşte suma Riemann asociată funcției *f*, diviziunii Δ şi sistemului de puncte intermediare $(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \in \delta_k$, $1 \le k \le r$.

Propoziția 7.2

1. Dacă Δ' este o diviziune mai fină decât Δ, atunci:

$$s_\Delta(f) \le s_{\Delta'}(f) \le S_{\Delta'}(f) \le S_\Delta(f).$$

2. Pentru orice diviziuni Δ şi Δ' ale lui *V* avem:

$$s_\Delta(f) \le S_{\Delta'}(f).$$

3. Pentru orice sumă Riemann $\sigma_\Delta(f, \xi_k, \eta_k, \zeta_k)$ avem

$$s_\Delta(f) \le \sigma_\Delta(f, \xi_k, \eta_k, \zeta_k) \le S_\Delta(f).$$

Definiția 7.3. Spunem că funcția *f* este integrabilă Riemann pe $V \subset \mathbb{R}^3$ dacă există $I \in R$ cu proprietatea că oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încât pentru orice diviziune Δ a lui *V* cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$ şi pentru orice alegere a punctelor intermediare $(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \in \delta_k$, $1 \le k \le r$, rezultă că:

$$\left| \sigma_\Delta(f, \xi_k, \eta_k, \zeta_k) - I \right| < \varepsilon.$$

Numărul I cu această proprietate se notează:

$$I = \iiint_V f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

şi se numeşte integrala triplă (sau integrala de volum) a lui f pe V. Domeniul V se numeşte domeniul de integrare, iar $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ se numeşte elementul de volum.

Teorema 7.4 (Criteriul lui Darboux)

Funcția mărginită $f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann pe $V \subseteq D$ dacă şi numai dacă oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât pentru orice diviziune Δ a lui V cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$ să avem

$$S_\Delta(f) - s_\Delta(f) < \varepsilon.$$

Teorema 7.5. Orice funcție continuă $f : V \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ este integrabilă pe V.

Din definiția integralei triple rezultă următoarele proprietăți (presupunem că integralele există):

a) volumul domeniului V este

$$\text{volum}\,V = \iiint_V \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\,;$$

b) liniaritatea integralei triple este dată de formulele:

$$\iiint_V \left[f_1(x,y,z) + f_2(x,y,z)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_V f_1(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iiint_V f_2(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

$$\iiint_V \alpha f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \alpha \iiint_V f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\ \alpha \in \mathbb{R},$$

c) dacă V este împărțit în două subdomenii V_1 şi V_2 printr-o suprafață, atunci:

$$\iiint_V f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_{V_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iiint_{V_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\,;$$

d) $f(x,y,z) \geq 0,\ \forall (x,y) \in D$ implică

$$\iiint_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \geq 0\,;$$

e) are loc inegalitatea

$$\left|\iiint_V f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right| \le \iiint_V \left|f(x,y,z)\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z .$$

Calculul integralei triple se reduce la calculul succesiv a trei integrale simple.

Teorema 7.6. Fie $f : V = [a,b]\times[c,d]\times[e,g] \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ o funcție mărginită şi integrabilă pe V, astfel încât pentru orice $(x,y)\in[a,b]\times[c,d]$ există integrala:

$$\int_e^g f(x,y,z)\,\mathrm{d}z := F(x,y).$$

Atunci funcția $F : [a,b]\times[c,d] \to \mathbb{R}$ este integrabilă pe $[a,b]\times[c,d] \to \mathbb{R}$ şi are loc formula

$$\iiint_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_D \left(\int_e^g f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y ,$$

unde am notat $D := [a,b]\times[c,d]$.

Definiția 7.7. $V \subset \mathbb{R}^3$ se numeşte domeniu simplu în raport cu axa Oz dacă

$$V = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, (x,y)\in D,\ \varphi(x,y)\le z\le\psi(x,y)\right\},$$

unde funcțiile $\varphi,\psi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sunt continue.

Teorema 7.8. Fie $V \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu simplu în raport cu axa Oy şi $f : V \to \mathbb{R}$ o funcție mărginită şi integrabilă astfel încât pentru orice $(x,y)\in D$ există integrala

$$\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z := F(x,y).$$

Atunci funcția $F : D \to \mathbb{R}$ este integrabilă pe D şi are loc formula

$$\iiint_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_D \left(\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y .$$

Dacă domeniul $D \subset \mathbb{R}^2$ este simplu în raport cu axa Oy,

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| a \le x \le b,\ u(x) \le x \le v(x) \right\},$$

iar $V \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu simplu în raport cu axa Oz,

$$V = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \middle| (x, y) \in D, \varphi(x, y) \le z \le \psi(x, y) \right\},$$

atunci avem următoarea formulă de calcul pentru integrala triplă:

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_a^b \mathrm{d}x \iint\limits_D \int_{u(x)}^{v(x)} \mathrm{d}y \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x, y, z)\,\mathrm{d}z.$$

Pentru calculul integralelor triple pe domenii mai complicate, împărțim aceste domenii cu ajutorul unor paralele cu planele de coordonate, în subdomenii care sunt simple în raport cu una din axe, apoi folosim formulele anterioare şi proprietatea de aditivitate a integralei triple.

Fie $V' \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu compact, raportat la sistemul de referință cartezian Ouvw, având frontiera S', care este o suprafață închisă netedă. Să considerăm transformarea regulată

$$T : \begin{cases} x = f(u, v, w); \\ y = g(u, v, w); \quad f, g, h \in C^1(V_1); \ \dfrac{D(f, g, h)}{D(u, v, w)} \ne 0 \ \text{pe} \ V \subset \mathbb{R}^3, \\ z = h(u, v, w), \end{cases}$$

unde V_1 este o mulțime deschisă ce conține compactul $V' \subset \mathbb{R}^3$. Atunci când (u, v, w) parcurge pe V', (x, y, z) prin transformarea regulată T parcurge compactul $V \subset \mathbb{R}^3$ raportat la sistemul de referință cartezian Oxzy. În acest caz, spunem că domeniul $V \subset \mathbb{R}^3$ este imaginea domeniului $V' \subset \mathbb{R}^3$ prin transformarea regulată T şi se scrie $V = T(V')$, iar frontiera S a domeniului V este imaginea frontierei S' prin transformarea regulată T, adică $S = T(S')$. În aceste condiții are loc formula schimbării de variabilă în integrala triplă.

Teorema 7.9. (Formula schimbării de variabilă în integrala triplă)

Fie $F : V \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ o funcție continuă pe V. Atunci:

$$\iiint\limits_V F(x, y, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}y = \iiint\limits_{V'} F\big(f(u, v, w), g(u, v, w), h(u, v, w)\big) \left| \frac{D(f, g, h)}{D(u, v, w)} \right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w.$$

Să considerăm trecerea de la coordonatele carteziene x, y, z la coordonatele sferice ρ, θ, φ prin

$$T:\begin{cases} x=\rho\sin\theta\cos\varphi; \\ y=\rho\sin\theta\sin\varphi; \quad \rho\in[0,R], \theta\in[0,\pi], \varphi\in[0,2\pi], \\ z=\rho\cos\theta; \end{cases}$$

unde

$$\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,\varphi)}=\rho^2\sin\theta .$$

În acest caz formula de schimbare de variabilă în integrala triplă devine:

$$\iiint\limits_V F(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}y =$$

$$=\iiint\limits_{V'} F(\rho\sin\theta\cos\varphi,\rho\sin\theta\sin\varphi,\rho\cos\theta)\rho^2\sin\theta\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi.$$

Mai general, se poate considera transformarea regulată

$$T:\begin{cases} x=a\rho\sin\theta\cos\varphi; \\ y=b\rho\sin\theta\sin\varphi; \quad \rho\in[0,1], \theta\in[0,\pi], \varphi\in[0,2\pi], \\ z=\rho\cos\theta; \end{cases}$$

unde

$$\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\varphi,\theta)}=abc\rho^2\sin\theta ,$$

care permite trecerea de la coordonatele carteziene x, y, z la coordonatele sferice generalizate ρ, θ, φ.

De asemenea, se utilizează trecerea de la coordonate carteziene la coordonate cilindrice prin transformarea regulată

$$T:\begin{cases} x=\rho\cos\varphi; \\ y=\rho\sin\varphi; \quad \rho\in[0,R], \theta\in[0,2\pi], \varphi\in[0,h], \\ z=z; \end{cases}$$

unde

$$\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\varphi,z)}=\rho .$$

În acest caz, formula de schimbare de variabilă în integrala triplă devine:

$$\iiint\limits_V F(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{V'} F(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\,\rho\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z\,.$$

Cele mai importante aplicații ale integralelor triple sunt:

a) Fie $V \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu compact a cărui frontieră este urma unei suprafețe închise netede (sau netedă pe porțiuni). Volumul domeniului V este dat de formula

$$\text{volum}(V) = \iiint\limits_V \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\,.$$

b) Să considerăm un corp material neomogen ce ocupă în spațiu domeniul compact $V \subset \mathbb{R}^3$ şi presupunem cunoscută densitatea în fiecare punct a corpului material dată de funcția continuă $\rho : V \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_+$. Masa corpului material este

$$M = \iiint\limits_V \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\,,$$

iar coordonatele centrului de greutate $(x_\mathrm{G}, y_\mathrm{G}, z_\mathrm{G})$ sunt date de formulele:

$$x_\mathrm{G} = \frac{1}{M}\iiint\limits_V x\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\,;$$

$$y_\mathrm{G} = \frac{1}{M}\iiint\limits_V y\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\,;$$

$$z_\mathrm{G} = \frac{1}{M}\iiint\limits_V z\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\,.$$

c) Momentele de inerție față de axele de coordonate ale unui corp material, de densitate ρ care ocupă domeniul V, sunt date de egalitățile:

$$I_{\mathrm{O}x} = \iiint\limits_V \left(x^2+z^2\right)\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\,;$$

$$I_{\mathrm{O}y} = \iiint\limits_V \left(x^2+z^2\right)\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\,;$$

$$I_{\mathrm{O}z} = \iiint\limits_V \left(x^2+z^2\right)\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\,.$$

Momentele de inerție față de planele de coordonate ale aceluiași corp sunt

$$I_{xOy} = \iiint_V z^2 \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\,;$$

$$I_{xOz} = \iiint_V y^2 \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\,;$$

$$I_{yOz} = \iiint_V x^2 \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\,,$$

iar momentul de inerție față de originea axelor de coordonate este

$$I_O = \iiint_V \left(x^2 + y^2 + z^2\right) \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\,.$$

d) Fie un corp material neomogen care ocupă în spațiu domeniul compact $V \subset \mathbb{R}^3$ şi presupunem cunoscută densitatea în fiecare punct al corpului material dată de funcția continuă $\rho : V \subset \mathbb{R}^3$ şi presupunem cunoscută densitatea în fiecare punct al corpului material dată de funcția continuă $\rho : V \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_+$.

Potențialul newtonian al corpului în punctul $P(a,b,c)$ este dat de formula

$$U(a,b,c) = \iiint_V \frac{\rho(x,y,z)}{r(x,y,z)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\,,$$

unde $r(x,y,z) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$ este distanța dintre punctul curent $M(x,y,z) \in V$ şi punctul $P(a,b,c)$.

Corpul material neomogen atrage punctul material $P(a,b,c)$ de masă m cu o forță $\overline{F}$ (îndreptată spre corpul material) ale cărei proiecții pe axele de coordonate sunt:

$$F_x = K \cdot m \cdot \iiint_V \frac{x-a}{r^3(x,y,z)} \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

$$F_y = K \cdot m \cdot \iiint_V \frac{y-b}{r^3(x,y,z)} \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

$$F_z = K \cdot m \cdot \iiint_V \frac{z-c}{r^3(x,y,z)} \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

unde K este constanta atracției universale.

7.2 PROBLEME REZOLVATE

1 Să se calculeze volumul corpului mărginit de $x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0$ $z \leq 1 - y^2,\ x + y \leq 1$.

Rezolvare. Volumul unui corp este dat de expresia

$$\text{Vol} = \iiint\limits_V \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

unde

$$V = \left\{ (x, y, z) \middle| x \in [0,1], 0 \leq y \leq 1 - x, 0 \leq z \leq 1 - y^2 \right\},$$

domeniu simplu în raport cu axa Oz (în spațiu) şi axa Oy (în plan). Rezultă:

$$\text{Vol} = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} \mathrm{d}y \int_0^{1-y^2} \mathrm{d}z = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} \left(1 - y^2\right) \mathrm{d}y = \int_0^1 \left(1 - x - \frac{y^3}{3} \bigg|_{y=0}^{y=1-x} \right) \mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^1 \left(1 - x - \frac{(1-x)^3}{3} \right) \mathrm{d}x = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{12} = \frac{5}{12}.$$

2 Să se calculeze volumul corpului Ω mărginit de suprafețele

$$-1 \leq x \leq 2,\ z = 4 - y^2,\ z = y^2 + 2.$$

Rezolvare.

$$\text{Vol} = \iiint\limits_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint\limits_D \mathrm{d}y\mathrm{d}z \int_{-1}^{2} \mathrm{d}x = 3 \iint\limits_D \mathrm{d}y\mathrm{d}z =$$

$$= 3 \int_{-1}^{1} \mathrm{d}y \int_{y^2+2}^{4-y^2} \mathrm{d}z = 3 \int_{-1}^{1} \left(2 - 2y^2\right) \mathrm{d}y = 6 \left(2 - \frac{2}{3} \right) = 8.$$

3 Să se calculeze volumul corpului sferic

$$V = \left\{ (x, y, z) \middle| x^2 + y^2 + z^2 \leq R \right\}.$$

Rezolvare. Coordonatele sferice ρ, θ, φ sunt legate de coordonatele carteziene prin relațiile

$$x = \rho \sin\theta \cos\varphi, \quad y = \rho \sin\theta \sin\varphi, \quad z = \rho \cos\theta$$

cu

$$0 \le \rho \le R,\ \theta \in [0,\pi],\ \varphi \in [0,2\pi] \text{ şi } J = \rho^2 \sin\theta \text{ (Jacobianul).}$$

Aşadar:

$$\iiint_V \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{R} \rho^2 \sin\theta \mathrm{d}\rho = 2\pi \int_0^{\pi} \sin\theta \mathrm{d}\theta \int_0^{R} \rho^2 \mathrm{d}\rho = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

4 Să se calculeze volumul elipsoidului

$$V = \left\{ (x,y,z) \middle| \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1 \right\}.$$

Rezolvare. Aplicăm coordonatele sferice generalizate

$$x = a\rho \sin\theta \cos\varphi, \quad y = b\rho \sin\theta \sin\varphi, \quad z = c\rho \cos\theta$$

cu

$$0 \le \rho \le 1,\ \theta \in [0,\pi],\ \varphi \in [0,2\pi].$$

Jacobianul transformării este $J = abc\rho^2 \sin\theta$.

$$\text{Vol} = \iiint_V \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta \mathrm{d}\theta \int_0^{1} abc\rho^2 \mathrm{d}\rho = \frac{4\pi}{3} abc.$$

Dacă $a = b = c = R$, se obține volumul corpului sferic.

5 Să se calculeze volumul cilindrului

$$V = \left\{ (x,y,z) \middle| x^2 + y^2 \le R^2, 0 \le z \le h \right\}.$$

Rezolvare. Trecând la coordonate cilindrice

$$x = \rho\cos\theta,\ y = \rho\sin\theta,\ z = z \text{ şi } J = \rho,$$

obținem:

$$\text{Vol} = \iiint_V \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{R} \rho \mathrm{d}\rho \int_0^{h} \mathrm{d}z = 2\pi \frac{R^2}{2} h = \pi R^2 h.$$

6 Să se calculeze volumul mărginit de suprafața $z^2 = \left(x^2 + y^2\right)^3$ şi de planele $z = 0$ şi $z = a^3, a > 0$.

Rezolvare. Trecând la coordonate cilindrice

$x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta,\ z=z,\ J=\rho$, observăm că

$\rho^6=z^2$ cum $z\ge 0\Rightarrow z=\rho^3$, deci $\rho\in[0,a]$.

Avem

$$\text{Vol}=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\rho\mathrm{d}\rho\int_0^{\rho^3}\mathrm{d}z=2\pi\int_0^a\rho^4\,\mathrm{d}\rho=\frac{2\pi a^5}{5}.$$

7 Să se calculeze următoarele integrale triple:

$$I=\iiint_V xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

unde V este delimitat de suprafețele $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y+z=1$.

Rezolvare. Domeniul

$$V=\left\{(x,y,z)\middle|0\le x\le 1,\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1-x,\ 0\le z\le 1-x-y\right\}$$

este un domeniu simplu în raport cu axa Oz. Rezultă:

$$I=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{1-x-y}xyz\mathrm{d}z=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\frac{xy(1-x-y)^2}{2}\mathrm{d}y$$

$$\int_0^{1-x}\frac{xy(1-x-y)^2}{2}\mathrm{d}y=\left(\frac{xy^2}{4}+\frac{x^3y^2}{4}+\frac{xy^4}{8}-\frac{x^2y^2}{2}-\frac{xy^3}{3}+\frac{x^2y^3}{3}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=1-x}=$$

$$=\frac{(x+x^3)(1-x)^2}{4}+\frac{x(1-x)^4}{8}-\frac{x^2(1-x)^2}{2}-\frac{(1-x)^3(x^2-x)}{3}=\frac{x(1-x)^4}{24}.$$

Deci:

$$I=\int_0^1\frac{x(1-x)^4}{24}\mathrm{d}x=\frac{1}{24}\int_0^1 x\left(1-4x+6x^2-4x^3+x^4\right)\mathrm{d}x=$$

$$=\frac{1}{24}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{4x^3}{3}+\frac{6x^4}{4}-\frac{4x^5}{5}\frac{x^6}{6}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=1}=\frac{1}{720}.$$

8 $I=\iiint_V x^2y^2z^2\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, unde V este elipsoidul $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\le 1$.

Rezolvare. Facem schimbarea de variabile $x = a\rho\sin\theta\cos\varphi$, $y = b\rho\sin\theta\sin\varphi$, $z = c\rho\cos\theta$ cu $\rho\in[0,1], \theta\in[0,\pi], \varphi\in[0,2\pi]$, $J = abc\rho^2\sin\theta$.

$$I = a^3b^3c^3\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\sin^5\theta\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^8\mathrm{d}\rho =$$

$$= \frac{a^3b^3c^3}{9}\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\sin^5\theta\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta =$$

$$= \frac{16a^3b^3c^3}{945}\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{4a^3b^3c^3}{945}\int_0^{2\pi}\sin^2 2\varphi\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \frac{4a^3b^3c^3}{945}\left(\frac{\varphi}{8} - \frac{\sin 4\varphi}{32}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{\pi a^3b^3c^3}{945}.$$

9 Să se determine coordonatele centrului de greutate al corpului cuprins între paraboloidul $z = 1 - x^2 - y^2$ şi planul $z = 0$.

Rezolvare. Calculăm volumul şi momentele statice faţă de planele de coordonate

$$V = \iiint_V \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y\left(\int_0^{1-x^2-y^2}\mathrm{d}z\right) =$$

$$= \iint_D\left(1 - x^2 - y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho\left(1-\rho^2\right)\mathrm{d}\rho =$$

$$= \frac{\pi}{2}, \text{ unde } D = \left\{(x,y)\,\middle|\,x^2 + y^2 \le 1\right\} \subset \mathbb{R}^2.$$

$$S_{yOz} = \iiint_V x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_0^{1-x^2-y^2}\mathrm{d}z = \iint_D x\left(1-x^2-y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$= \int_0^{2\pi}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^2\left(1-\rho^2\right)\mathrm{d}\rho = \frac{4}{15}\int_0^{2\pi}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{4}{15}\sin\theta\Big|_0^{2\pi} = 0.$$

$$S_{xOz} = \iiint_V y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_D y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_0^{1-x^2-y^2}\mathrm{d}z = \iint_D y\left(1-x^2-y^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$$

$$= \int_0^1\rho^2\left(1-\rho^2\right)\mathrm{d}\rho\int_0^{2\pi}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{4}{15}\int_0^{2\pi}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{4}{15}(-\cos\theta)\Big|_0^{2\pi} = 0.$$

$$S_{xOy}=\iiint\limits_V z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y\int\limits_0^{1-x^2-y^2} z\mathrm{d}z=$$

$$=\iint\limits_D \left(1-x^2-y^2\right)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int\limits_0^1\left(1-\rho^2\right)^2\rho\mathrm{d}\rho=\frac{\pi}{6}.$$

Rezultă coordonatele centrului de greutate:

$$x_{\mathrm{G}}=\frac{S_{yOz}}{V}=0;\ y_{\mathrm{G}}=\frac{S_{xOz}}{V}=0;\ z_{\mathrm{G}}=\frac{S_{xOy}}{V}=\frac{1}{3}.$$

10 Să se calculeze momentul de inerție față de planul (yOz) al unui sfere cu centrul în origine și de densitate constantă ρ.

Rezolvare.

$I_{yOz}=\rho_0\iiint\limits_V x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, unde

$$V=\left\{(x,y,z)\middle|x^2+y^2+z^2\le R^2\right\}.$$

Folosind coordonatele sferice

$$x=\rho\sin\theta\cos\varphi,\ y=\rho\sin\theta\sin\varphi,\ z=\rho\cos\theta,\ j=\rho^2\sin\theta$$

se obține

$$I_{yOz}=\int\limits_0^{2\pi}\cos^2\varphi\mathrm{d}\varphi\int\limits_0^{\pi}\sin^3\theta\mathrm{d}\theta\int\limits_0^R\rho^4\mathrm{d}\rho=\frac{4\pi R^5}{15}.$$

11 Se dă suprafața (σ) definită prin relația implicită

$$\left(\sqrt{x^2+y^2}-a\right)^2+z^2=R^2;\ a,R\in\mathbb{R}_+^*.$$

Să se determine:

(i) aria suprafeței;

(ii) volumul corpului mărginit de suprafața (σ);

(iii) să se calculeze fluxul câmpului $\overline{v}=\overline{r}$ prin suprafața (σ);

(iv) considerând reprezentarea parametrică a suprafeței (σ)

$$\sigma:\begin{cases}x=(a+R\cos u)\cos v, & u\in[0,2\pi],\\ y=(a+R\cos u)\sin v, & v\in[0,2\pi],\\ z=R\sin u,\end{cases}$$

să se calculeze circulația câmpului $\overline{w} = \overline{i} + \overline{j} + \frac{y}{z}\overline{k}$ de-a lungul curbei Γ situate pe suprafața σ pentru care $u = v$.

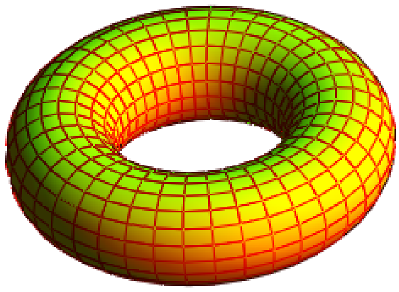


Fig. 7.1

Rezolvare.

(i) Aria suprafeței torului (σ) este:

$$A = \iint_{\sigma} \mathrm{d}\sigma = \iint_{\Delta} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \iint_{\Delta} \left\| \overline{r}'_u \times \overline{r}'_v \right\| \mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

unde

$$\Delta = \left\{ (u,v) \in \mathbb{R}^2 \middle| (u,v) \in [0,2\pi]^2 \right\}$$

şi

$$\begin{cases} \overline{r}'_u = \frac{\partial x}{\partial u}\overline{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\overline{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\overline{k} = -R\sin u \cos v \cdot \overline{i} - R\sin u \sin v \cdot \overline{j} + R\cos u \cdot \overline{k}; \\ \overline{r}'_v = \frac{\partial x}{\partial v}\overline{i} + \frac{\partial j}{\partial v}\overline{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\overline{k} = -(a + R\cos u)\sin v \cdot \overline{i} + (a + R\cos u)\cos v \cdot \overline{j}. \end{cases}$$

Rezultă $\left\| \overline{r}'_u \times \overline{r}'_v \right\| = R(a + R\cos u) \Rightarrow$

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} R(a + R\cos u)\mathrm{d}v\mathrm{d}u = 4\pi^2 aR.$$

(ii) Pentru calculul volumului folosim schimbarea de variabilă

$$T : \begin{cases} x = (a + \rho R\cos u)\cos v, & u \in [0,2\pi]; \\ y = (a + \rho R\cos u)\sin v, & v \in [0,2\pi]; \\ z = R\rho \sin u, & \rho \in [0,1]. \end{cases}$$

Jacobianul transformării este:

$$|J| = \left| \frac{D(x,y,z)}{D(\rho,u,v)} \right| = (a + \rho R\cos u)\rho R^2 \neq 0$$

şi

$$T(\Omega)=\Delta'=\left\{(\rho,u,v)\in[0,1]\times[0,2\pi]^2\right\}.$$

Rezultă:

$$\vartheta=\iiint_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_{\Delta}\rho R^2(a+\rho R\cos u)\mathrm{d}\rho\mathrm{d}u\mathrm{d}v=$$

$$=\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\rho R^2(a+\rho R\cos u)\mathrm{d}v\mathrm{d}u\mathrm{d}\rho=2\pi^2R^2a.$$

(iii) Fluxul câmpului $\overline{v}$ prin suprafaţa σ este:

$$\Phi(\overline{v},\sigma)=\iint_{\sigma}\overline{v}\cdot\overline{n}\,\mathrm{d}\sigma=$$

$$=\iint_{\sigma}\left[(a+R\cos u)\cos v\cdot\overline{i}+(a+R\cos u)\sin v\cdot\overline{j}+R\sin u\cdot\overline{k}\right]\times$$

$$\times\left(\cos u\cos v\cdot\overline{i}+\cos u\sin v\cdot\overline{j}+\sin u\cdot\overline{k}\right)\mathrm{d}\sigma=$$

$$=\iint_{\Delta}\left[(a+R\cos u)\cos u+R\sin^2 u\right](a+R\cos u)R\mathrm{d}u\mathrm{d}v=6\pi^2R^2a.$$

Se putea folosi şi formula integrală Gauss-Ostrogradski

$$\Phi(\overline{v},\sigma)=\iiint_{\Omega}3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=3\vartheta=6\pi^2R^2a.$$

(iv) Circulaţia câmpului $\overline{w}$ pe curba Γ este:

$$C(\overline{w},\Gamma)=\int_{\Gamma}\overline{w}\cdot\mathrm{d}\overline{r}=\int_{\Gamma}\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\frac{y}{z}\mathrm{d}z=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[-R\sin 2u+R\cos 2u+(a+R\cos u)\cos u\right]\mathrm{d}u=2\pi(a+R).$$

12 Fie funcţia: $f:D\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $f(x,y,z)=\left[x^2+y^2+z^2\right]$, unde

$$D=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,\middle|\,x^2+y^2+z^2<2\right\}.$$

Dacă $\sigma\in\mathsf{D}(D)$ este o diviziune de forma $\sigma=\{d_0,d_1\}$ cu

$$d_k=\left\{(x,y,z)\in D\,\middle|\,k\le x^2+y^2+z^2<k+1\right\},\ k=\overline{0,1},$$

să se calculeze sumele Darboux superioare şi inferioare corespunzătoare diviziunii σ şi funcţiei *f*.

Să se precizeze dacă f este Darboux integrabilă pe D şi în caz afirmativ să se calculeze $\iiint_D f$.

Rezolvare. Notăm cu

$$M_k = \max\left\{ f(x,y) \middle| (x,y) \in d_k \right\} \text{ şi}$$

$$m_k = \min\left\{ f(x,y) \middle| (x,y) \in d_k \right\},\ k = \overline{0,1},$$

şi constatăm că $M_k = m_k,\ k = \overline{0,1}$.

Prin urmare

$$S(f,\sigma) = s(f,\sigma).$$

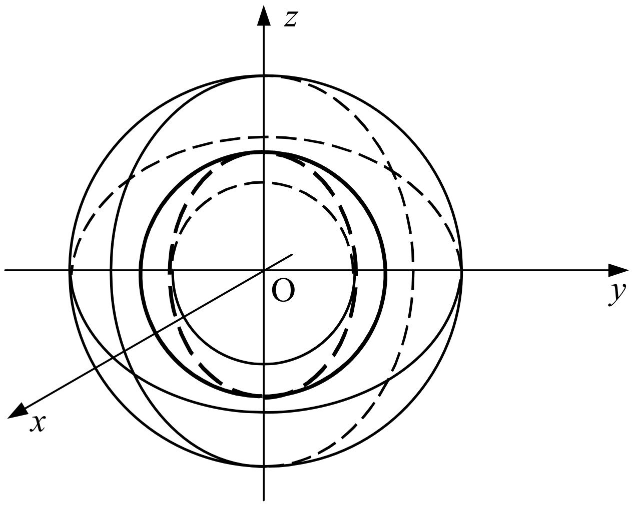


Fig. 7.2

Mai mult

$$S(f,\sigma) = M_0 \,\text{măs}\, d_0 + M_1 \,\text{măs}\, d_1 = 0\frac{4\pi \cdot 1}{3} + 1\frac{4\pi\left(1^3 - 0^3\right)}{3} = \frac{4\pi}{3}.$$

În concluzie, f este Darboux integrabilă pe D şi

$$\iiint_D f = \frac{4\pi}{3}.$$

13 Să se arate că funcţia $f : [0,2]^3 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y,z) = \begin{cases} x + y + z, & (x,y,z) \in [0,1]^2 \times [0,2] \\ xyz, & (x,y,z) \in [0,1] \times (1,2] \times [0,2] \\ xy + yz + zx, & (x,y,z) \in (1,2] \times [0,1] \times [0,2] \\ x^2 + y^2 + z^2, & (x,y,z) \in (1,2] \times (1,2] \times [0,2] \end{cases}$$

este integrabilă pe $[0,2]^3$ şi să se calculeze $\iiint\limits_{[0,2]^3} f$.

Rezolvare. Constatăm că funcția f este mărginită pe $[0,2]^3$ şi că punctele sale de discontinuitate sunt conținute într-o reuniune finită de dreptunghiuri paralele cu planele de coordonate. În consecință, f este integrabilă pe $[0,2]^3$ şi

$$\iiint\limits_{[0,2]^3} f = \int_0^1\left(\int_0^1\left(\int_0^2 (x+y+z)\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x + \int_0^1\left(\int_1^2\left(\int_0^2 xyz\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x +$$

$$+\int_1^2\left(\int_0^1\left(\int_0^2 (xy+yz+zx)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x + \int_1^2\left(\int_1^2\left(\int_0^2 \left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \frac{77}{3}.$$

14 Fie funcția $f:[0,1]^3 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y,z)=\begin{cases} 1, \text{ dacă } x\in \mathbb{R}-Q \text{ sau } y\in \mathbb{R}-Q \text{ sau } z\in \mathbb{R}-Q; \\ 1-\dfrac{1}{q}, \text{ dacă } x,y,z\in Q \text{ şi } x=\dfrac{p}{q}, \text{ unde } p,q\in \mathbb{N},\ (p,q)=1. \end{cases}$$

(i) Să se arate că f este integrabilă pe $[0,1]^3$ şi să se calculeze $\iiint\limits_{[0,1]^3} f$.

(ii) Pentru orice $x\in(\mathbb{R}-Q)\cap[0,1]$ definim funcția parțială

$$f_1^{(x)}(y,z)=f(x,y,z), \quad f_1^{(x)}:[0,1]^2 \to \mathbb{R}.$$

Să se arate că $f_1^{(x)}$ este integrabilă pe $[0,1]^2$ şi să calculeze $\iint\limits_{[0,1]^2} f_1^{(x)}$.

(iii) Pentru orice $x\in Q\cap[0,1]$ cu $x=\dfrac{p}{q}$; $p,q\in\mathbb{N}$, $(p,q)=1$, definim funcția parțială $f_2^{(x)}(y,z)=f(x,y,z)$, $f_2^{(x)}:[0,1]^2\to\mathbb{R}$. Să se arate că $f_2^{(x)}$ nu este integrabilă pe $[0,1]^2$.

Rezolvare.

(i) Se demonstrează că mulțimea punctelor de discontinuitate a funcției f este

$$D(f)=(Q\cap[0,1])\times[0,1]^2.$$

Cum $Q\cap[0,1]=\left\{1-\frac{1}{n}\middle|n\in\mathbb{N}^*\right\}$ şi pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ dreptunghiul $\left\{1-\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}^*}\times[0,1]^2$ este de măsură Jordan nulă rezultă că mulțimea $D(f)$ este de măsură Lebesgue nulă; prin urmare, f este integrabilă pe $[0,1]^3$.

Cum în orice paralelipiped $\Delta\subset[0,1]^3$ se găsesc puncte care au abscisa iraţională rezultă că

$$\forall\,\sigma\in \mathcal{D}\left([0,1]^3\right)$$

$$S(f,\sigma)-s(f,\sigma)=\sum_{\Delta\in\sigma}\left(M_\Delta(f)-m_\Delta(f)\right)\text{măs}(\Delta)=\sum_{\Delta\in\sigma}\text{măs}(\Delta)=1\Rightarrow\iiint\limits_{[0,1]^3}f=1.$$

(ii) Dacă $x\in(\mathbb{R}-Q)\cap[0,1]\Rightarrow f_1^{(x)}(y,z)=1,\ \forall(y,z)\in[0,1]^2$; aşadar, $f_1^{(x)}$ este integrabilă pe $[0,1]^2$, iar $\iint\limits_{[0,1]^2}f_1^{(x)}=1$.

(iii) Pentru $x\in Q\cap[0,1]$ cu $x=\frac{p}{q};\ p,q\in\mathbb{N}$ şi $(p,q)=1$ se obține că funcția $f_2^{(x)}:[0,1]^2\to\mathbb{R}$,

$$f_2^{(x)}(y,z)=\begin{cases}1,\text{ dacă } y\in\mathbb{R}-Q\text{ sau } y\in\mathbb{R}-Q;\\ 1-\frac{1}{q},\text{ dacă } y,z\in Q.\end{cases}$$

Prin urmare, mulțimea punctelor de discontinuitate a funcției $f_2^{(x)}$ este:

$$D\left(f_2^{(x)}\right)=[0,1]^2,\ \forall\ x\in Q\cap[0,1].$$

Cum mulțimea $D\left(f_2^{(x)}\right)$ nu este de măsură Lebesgue nulă deducem că $f_2^{(x)}$ nu este integrabilă pe $[0,1]^2$.

Observație. În concluzie, deşi f este integrabilă pe $[0,1]^3$ nu toate funcțiile parțiale sunt integrabile pe $[0,1]^2$.

15 Fie funcția $f:[-1,1]^3 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y,z)=\begin{cases} 0, \text{ dacă } (x,y,z)=(0,0,0); \\ \dfrac{xyz}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}, \text{ dacă } (x,y,z)\in[-1,1]^3-\{(0,0,0)\}. \end{cases}$$

Să se arate că f nu este integrabilă Riemann pe $[-1,1]^3$, dar există integralele iterate şi ele sunt egale.

Rezolvare. Se verifică uşor că f nu este mărginită pe $[-1,1]^3$. Într-adevăr pentru şirul $(x_n,y_n,z_n)_n$ cu $y_n=\alpha x_n,\ z_n=x_n,\ n\in\mathbb{N},\ \alpha\in\mathbb{R}^*$, iar $\lim\limits_n x_n=0$ obținem

$$\lim_n f(x_n,y_n,z_n)=\frac{\alpha}{\left(2+\alpha^2\right)^2}\lim_n\frac{1}{x_n}=\pm\infty,\ \alpha\in\mathbb{R}^*.$$

În concluzie, f nu este integrabilă Riemann pe $[-1,1]^3$.

Integralele iterate există şi deoarece funcțiile parțiale sunt impare pe $[-1,1]$, deducem că ele sunt egale cu zero.

16 Fie funcția $f:[0,1]^3 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y,z)=\begin{cases} z\dfrac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2},\ (x,y,z)\in[0,1]^3-\{(0,0,0)\}; \\ 0,\ (x,y,z)\in(0,0,0). \end{cases}$$

Să se arate că f nu este integrabilă Riemann pe $[0,1]^3$, dar există integralele iterate şi

$$\int_0^1\left(\int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z\neq\int_0^1\left(\int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y,z)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}z.$$

Rezolvare. Considerăm şirul $(x_n,y_n,z_n)\subset\mathbb{R}^3$ cu

$$y_n=\alpha x_n,\ z_n=x_n,\ n\in\mathbb{N},\ \alpha\in\mathbb{R}_+^*, \text{ iar } \lim_n x_n=0.$$

Atunci

$$\lim_n f(x_n,y_n,z_n)=\frac{1-\alpha^2}{\left(1+\alpha^2\right)^2}\lim_n\frac{1}{x_n}=\pm\infty.$$

Deducem că f nu este integrabilă pe $[0,1]^3$.

Integralele iterate există şi

$$\int_0^1\left(\int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z=\int_0^1\left(\int_0^1\frac{-z}{y^2+1}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z=-\frac{\pi}{4};$$

$$\int_0^1\left(\int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y,z)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}z=\int_0^1\left(\int_0^1\frac{z}{x^2+1}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}z=\frac{\pi}{4}.$$

17 Să se calculeze folosind teorema lui Fubini, integrala

$$I=\iiint_V xyz\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

unde

$$V=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,\middle|\,\frac{z^2}{c^2}\geq\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2},\ z\leq c,\ x\geq 0,\ y\geq 0\right\},\ a,b,c\in\mathbb{R}_+^*.$$

Rezolvarea. Constatăm că integrantul este o funcţie continuă pe V (vezi figura), deci integrabilă pe V.

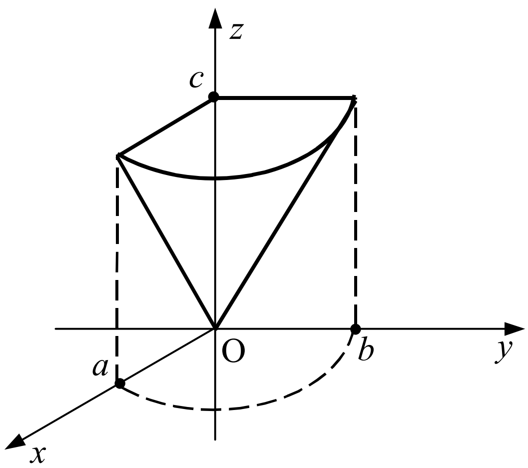


Fig. 7.3

Putem folosi teorema lui Fubini cel puţin în patru moduri.

M1. Integrând mai întâi în raport cu z, apoi cu y şi în final cu x găsim că:

$$D_{yx}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,\middle|\,\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1,\ x\geq 0,\ y\geq 0\right\}$$

$$I=\iint_{D_{yx}}\left(\int_{c\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}}^{c} xyz\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\int_0^a\left(\int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\left(\int_{c\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}}^{c} xyz\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=$$

$$=\int_0^a\left(\int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} c^2\frac{xy}{2}\left[1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right]\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_0^a\frac{b^2c^2}{8a^4}x\left(a^2-x^2\right)^2\mathrm{d}x=\frac{a^2b^2c^2}{48}.$$

M2. Calculul se simplifică dacă se integrează în altă ordine. Domeniul V se proiectează pe planul zOy sub formă de triunghi mărginit de dreptele

$$y=0,\ z=c,\ y=\frac{b}{c}z.$$

Notăm cu $D_{yz}=\left\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0\le y\le \frac{b}{c}z,\ z\ge 0\right\}$ şi obținem

$$I=\iint_{D_{yz}}\left(\int_0^{a\sqrt{\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}}} xyz\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^c\left(\int_0^{\frac{b}{c}z}\left(\int_0^{a\sqrt{\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}}} xyz\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z=$$

$$=\int_0^c\left(\int_0^{\frac{b}{c}z}\frac{a^2}{2}\left(\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)yz\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z=\int_0^c\frac{b^2a^2}{8c^4}z^5\mathrm{d}z=\frac{a^2b^2c^2}{48}.$$

M3. Dacă secționăm domeniul D cu un plan paralel cu zOy, cuprins între planele $x=0$ şi $x=a$, obținem o secțiune (care are aria)

$$D_x=\left\{(y,z)\in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, c\ge z\ge c\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}},\ 0\le y\le b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right\}.$$

Prin urmare:

$$I=\int_0^a\left(\iint_{D_x} xyz\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x=\int_0^a\left(\int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{b^2}}}\left(\int_{c\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}}^{c} xyz\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=$$

$$=\int_0^a\left(\int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{b^2}}}\frac{c^2xy}{2}\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\frac{a^2b^2c^2}{48}.$$

M4. Dacă secționăm domeniul D cu un plan paralele cu $x\mathrm{O}y$ cuprins între planele $z=0$ şi $z=c$, obținem o secțiune (care are aria)

$$D_z=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,\middle|\,\frac{z^2}{c^2}\geq\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2},\ x\geq 0,\ y\geq 0\right\},\ z\in(0,c).$$

Prin urmare:

$$I=\int_0^c\left(\iint_{D_z} xyz\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}z=\int_0^c\left(\int_0^{\frac{b}{c}z}\left(\int_0^{a\sqrt{\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}}} xyz\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z=\frac{a^2b^2c^2}{48}.$$

O altă modalitate de a calcula integrala este teorema de schimbare de variabilă.

M5. Pentru calculul integralei se mai poate folosi şi schimbarea de variabilă (coordonate cilindrice)

$$T:\begin{cases}x=a\rho\cos\theta, & \theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\\ y=b\rho\sin\theta, & \rho\in(0,u]\\ z=cu, & u\in(0,1]\end{cases}$$

cum $\exists\dfrac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,u)}=abc\rho>0$ deducem că transformarea T este regulată şi

$$I=\iiint_D xyz\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_{0-}^{1}\left(\int_{0-}^{u}\left(\int_0^{\pi/2} a^2b^2c^2\rho^3u\frac{\sin 2\theta}{2}\mathrm{d}\theta\right)\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}u=\frac{a^2b^2c^2}{48}.$$

18 Să se calculeze volumul mărginit de următoarea suprafață:

$$\sigma:\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=\frac{xyz}{h^3},\ a,b,c,h\in\mathbb{R}_+^*.$$

Rezolvare. Este convenabil să folosim coordonatele sferice generalizate cu ajutorul formulelor:

$$T=\begin{cases}x=a\rho\sin\theta\cos\varphi, & \varphi\in(0,\pi/2)\\ y=b\rho\sin\theta\sin\varphi, & \theta\in(0,\pi/2)\\ z=c\rho\cos\theta,\ \rho\in\left(0,\dfrac{abc}{2h^3}\sin^2\theta\cos\theta\sin2\varphi\right] & \end{cases}$$

iar

$$\exists\,\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\varphi,0)}=abc\rho^2\sin\theta>0,\ \forall(\rho,\varphi,\theta)\in T(\Omega),$$

deci transformarea este regulată şi

$$I=\iiint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_{0-}^{\frac{\pi}{2}-}\left(\int_{0-}^{\frac{\pi}{2}-}\left(\int_{0-}^{\frac{abc}{2h^3}\sin^2\theta\cos\theta\sin2\varphi}\mathrm{abc}\rho^2\mathrm{sin}\theta\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\theta\right)\mathrm{d}\varphi=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a^4b^4c^4}{24h^9}\sin^7\theta\cos^3\theta\sin^3 2\varphi\mathrm{d}\theta\right)\mathrm{d}\varphi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a^4b^4c^4}{960h^9}\sin^3 2\varphi\mathrm{d}\varphi=\frac{a^4b^4c^4}{1440h^9}.$$

19 Să se calculeze volumul corpului mărginit de următoarea suprafață:

$$\sigma:\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2+\frac{z^2}{c^2}=\frac{x}{h}+\frac{y}{k};\ x>0,\ y>0,\ z>0,\ a,b,c,h,k\in\mathbb{R}_+^*.$$

Rezolvare. Vom folosi următoarea transformare de coordonate sferice generalizate:

$$T:\begin{cases}x=a\rho\sin^\sigma\theta\cos^\sigma\varphi,\ \theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right),\ \sigma>0\\ y=b\rho\sin^\sigma\theta\sin^\sigma\varphi,\ \varphi\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\\ z=c\rho\cos^\sigma\theta,\ \rho\in\left(0,\dfrac{\frac{a}{h}\sin^\sigma\theta\cos^\sigma\varphi+\frac{b}{k}\sin^\sigma\theta\sin^\sigma\varphi}{\sin^{2\sigma}\theta\left(\cos^\sigma\theta+\sin^\sigma\theta\right)^2+\cos^{2\sigma}\theta}\right]\end{cases}$$

şi notăm $\rho_{\max} = \dfrac{\dfrac{a}{h}\sin^{\sigma}\theta\cos^{\sigma}\varphi + \dfrac{b}{k}\sin^{\sigma}\theta\sin^{\sigma}\varphi}{\sin^{2\sigma}\sigma\left(\cos^{\sigma}\theta + \sin^{\sigma}\theta\right)^2 + \cos^{2\sigma}\theta}$.

În cazul acest, jacobianul transformării se calculează după formula $J = J_1 J_2 J_3$, unde J_1, J_2 şi J_3 sunt determinanţii funcţionali ai transformărilor regulate

$$T_1 : \begin{cases} x = a\xi^{\sigma} \\ y = b\eta^{\sigma}; \quad \xi,\eta,\zeta \in \mathbb{R}_+^* \\ z = c\zeta^{\sigma} \end{cases}$$

$$T_2 : \begin{cases} \xi = r\sin\theta\cos\varphi \\ \eta = r\sin\theta\sin\varphi, \quad \varphi \in [0,2\pi],\ \theta \in [0,\pi],\ r > 0 \\ \zeta = r\cos\theta \end{cases}$$

$$T_3 : \begin{cases} r = \rho^{\frac{1}{\sigma}} \\ \theta = \theta \quad , \quad \theta,\varphi \in \mathbb{R},\ \rho > 0. \\ \varphi = \varphi \end{cases}$$

Prin urmare:

$$J = \frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,\varphi)} = \left(abc\sigma^3\xi^{\sigma-1}\eta^{\sigma-1}\rho^{\sigma-1}\right)\left(r^2\sin\theta\right)\left(\frac{1}{\sigma}\cdot\rho^{\frac{1}{\sigma}-1}\right) =$$

$$= abc\sigma^2\rho^2\sin^{2\sigma-1}\theta\cos^{\sigma-1}\varphi\sin^{\sigma-1}\varphi\cos^{\sigma-1}\theta.$$

Volumul corpului va fi:

$$I = \iiint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\rho_{\max}} abc\sigma^2\rho^2\sin^{2\sigma-1}\theta\cos^{\sigma-1}\varphi\sin^{\sigma-1}\varphi\cos^{\sigma-1}\theta\,\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\theta\right)\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{abc}{3}\sin^{2\sigma-1}\theta\cos^{\sigma-1}\varphi\sin^{\sigma-1}\varphi\cos^{\sigma-1}\theta\left(\frac{\dfrac{a}{h}\sin^{\sigma}\theta\cos^{\sigma}\varphi + \dfrac{b}{k}\sin^{\sigma}\theta\sin^{\sigma}\varphi}{\sin^{2\sigma}\theta\left(\cos^{\sigma}\varphi + \sin^{\sigma}\varphi\right)^2 + \cos^{2\sigma}\theta}\right)^3\mathrm{d}\theta\right)\mathrm{d}\varphi$$

Vom considera $\sigma = 2$ (pentru a simplifica calculele).

Deducem:

$$I=\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{\pi/2}\frac{abc}{3}\sin^5\theta\cos\varphi\sin\varphi\cos\theta\left(\left(\frac{\frac{a}{h}\cos^2\varphi+\frac{b}{k}\sin^2\varphi}{\sin^4\theta+\cos^4\theta}\right)\sin^2\theta\right)^3\mathrm{d}\theta\right)\mathrm{d}\varphi=$$

$$=\frac{abc}{3}\left(\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^{11}\theta\cdot\cos\theta}{\left(\sin^4\theta+\cos^4\theta\right)^3}\mathrm{d}\theta\right)\left(\int_0^{\pi/2}\left(\frac{a}{h}\cos^2\varphi+\frac{b}{k}\sin^2\varphi\right)\cos\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\right)=$$

$$=\frac{abc}{3}\left(\frac{7\pi}{64}-\frac{1}{8}\right)\cdot\frac{b^3h^3+a^3k^3+a^2bhk^2+ab^2h^2k}{8h^3k^3}.$$

20 Fie $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ un domeniu. Potențialul Newtonian al domeniului Ω în punctul $\mathrm{M}(x,y,z)$ este prin definiție

$$P_\Omega(x,y,z)=\iiint_\Omega\frac{\rho(\xi,\eta,\zeta)}{r}\mathrm{d}\mu_3=\iiint_\Omega\frac{\rho(\xi,\eta,\zeta)}{r}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta,$$

unde $\rho=\rho(\xi,\eta,\zeta)$ este densitatea punctual distribuită a corpului ce ocupă domeniul Ω, iar r este distanța de la un punct arbitrar $\mathrm{N}(\xi,\eta,\zeta)\in\Omega$ la punctul M:

$$r=\mathrm{dist}(\mathrm{M},\mathrm{N})=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}.$$

Forța Newtoniană de atracție cu care punctul M de masă m este atras de corpul ce ocupă domeniul Ω este:

$$\overline{F}_\Omega=k\cdot m\cdot\left(\frac{\partial P_\Omega}{\partial x}\overline{i}+\frac{\partial P_\Omega}{\partial y}\overline{j}+\frac{\partial P_\Omega}{\partial z}\overline{k}\right)=k\cdot m\cdot\sum\left(\iiint_\Omega\frac{\partial\rho}{\partial\xi}\frac{\mathrm{d}\mu_3}{r}-\iiint_\Omega\rho\frac{\xi-x}{r^3}\mathrm{d}\mu_3\right)\overline{i},$$

unde $k=6{,}67\cdot10^{-11}\ \mathrm{m}^3\mathrm{kg}^{-1}\cdot\mathrm{s}^{-2}$ este constanta de atracție universală.

Să se determine:

(i) potențialul Newtonian al unui cilindru omogen în centrului bazei sale;

(ii) forța de atracție Newtoniană dintre centrul bazei unui cilindru omogen şi cilindru;

(iii) potențialul Newtonian al unei sfere omogene în punctul arbitrar M;

(iv) forța de atracție Newtoniană cu care un punct oarecare M de masă m este atras de o sferă omogenă.

Rezolvare.

(i) Folosim teorema lui Fubini şi o schimbare de coordonate polare:

$$P_\Omega(0,0,0)=\iiint_\Omega \rho \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

unde

$$\Omega=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2+y^2\le R^2,\, 0\le z\le h\right\},\ R,h\in\mathbb{R}_+^*, \qquad \textbf{(7.1)}$$

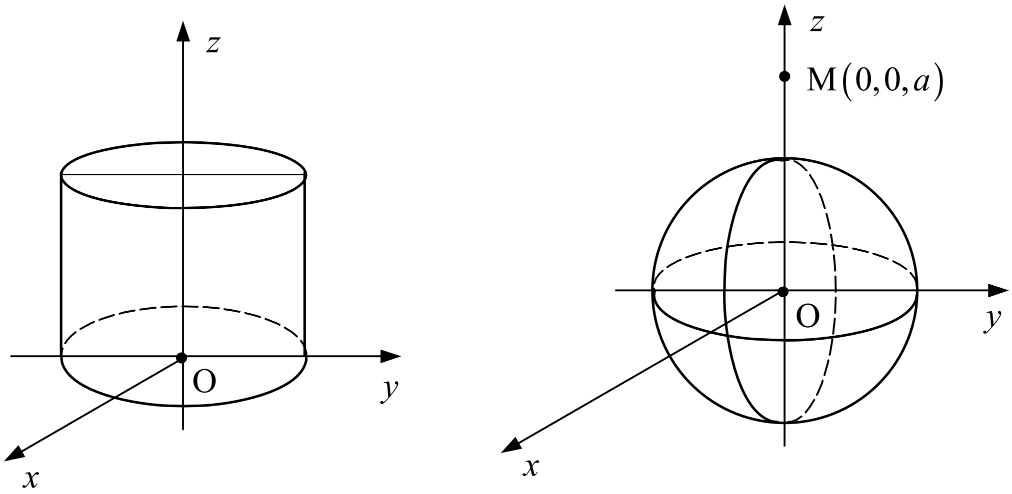


Fig. 7.4

Obţinem:

$$P_\Omega(0,0,0)=\rho\int_0^h\left(\iint_{x^2+y^2\le R^2}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)\mathrm{d}z=2\pi\rho\int_0^h\left(\sqrt{R^2+z^2}-z\right)\mathrm{d}z=$$

$$=\rho\pi R^2\ln\frac{h+\sqrt{R^2+h^2}}{R}+\rho\pi h\left(\sqrt{R^2+h^2}-h\right).$$

(ii) Pentru forţa de atracţie avem numai o singură componentă nenulă. Procedăm ca mai sus, cu Ω dat de (**7.1**):

$$F_z=\iiint_\Omega\frac{\rho z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_{x^2+y^2\le R^2}\left(\int_0^h\frac{\rho z\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$

$$=\iint_{x^2+y^2\le R^2}\rho\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+h^2}}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\pi\rho\left(R+h-\sqrt{R^2+h^2}\right).$$

(iii) Putem alege sistemul de coordonate astfel ca $\mathrm{M}\in\mathrm{O}z$. Astfel, $\mathrm{M}=\mathrm{M}(0,0,a)$, $a\in\mathbb{R}_+^*$ şi

$$P(0,0,a)=\iiint_{\Omega}\frac{\rho \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}},$$

unde:

$$\Omega=\left\{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 \middle| x^2+y^2+z^2\le R^2\right\},\ R\in \mathbb{R}_+^*$$

$$P(0,0,a)=P(M)=\rho\int_{-R}^{R}\left(\iint_{x^2+y^2\le R^2-z^2}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}}\right)\mathrm{d}z=$$

$$=2\pi\rho\int_{-R}^{R}\left(\sqrt{R^2-2az+a^2}-|z-a|\right)\mathrm{d}z= \qquad \textbf{(7.2)}$$

$$=2\pi\rho\left[\frac{1}{3a}\left((R+a)^3-|R-a|^3\right)-\int_{-R}^{R}|z-a|\mathrm{d}z\right].$$

Pentru

$$a\ge R\Rightarrow \int_{-R}^{R}|z-a|\mathrm{d}z=2aR, \qquad \textbf{(7.3)}$$

iar pentru $0\le a\le R\Rightarrow$

$$\int_{-R}^{R}|z-a|\mathrm{d}z=\int_{-R}^{a}(z-a)\mathrm{d}z+\int_{a}^{R}(a-z)\mathrm{d}z=a^2+R^2. \qquad \textbf{(7.4)}$$

Din (**7.1**), (**7.2**) şi (**7.3**) deducem că potenţialul în M al sferei omogen este:

$$P(M)=\begin{cases}\dfrac{4h}{3}\cdot\dfrac{R^3}{a}\rho,\ a\ge R\\ \left(2\pi R^2-\dfrac{2}{3}\pi a^2\right)\rho,\ 0\le a<R\end{cases}$$

aici *a* este interpretat ca $\mathrm{dist}(\mathrm{M},0)$.

Observaţie. Constatăm că potenţialul în M situat în exteriorul sferei este aceleaşi pentru toate punctele egal depărtate de centrul sferei, ca şi cum toată masa sferei ar fi concentrată în centrul ei.

Al doilea rezultat obţinut (cazul $0\le a<R$) conduce la următoarea concluzie. Dacă se consideră o sferă omogenă cu raza interioară R_1 şi raza exterioară R_2, potenţialul sferei în punctul M situat în cavitatea sa $(0\le a<R_1)$ se reprezintă sub forma diferenţei de potenţial:

$$P_{\Omega}(M)=P_{\Omega_1}(M)-P_{\Omega_2}(M)=\left(2\pi R_2^2-\frac{2}{3}\pi a^2\right)\rho-\left(2\pi R_1^2-\frac{2}{3}\pi a^2\right)\rho=$$

$$=2\pi\left(R_2^2-R_1^2\right)\rho$$

şi nu depinde de $a = \text{dist}(\text{M},0)$.

În concluzie, potenţialul sferei cu cavitate simetrică într-un punct M situat în cavitatea sa are valoarea constantă (nu depinde de poziţia punctului M din cavitatea sferei).

(iv) Procedând similar ca la punctul **(iii)**, se obţine că numai o singură componentă a forţei de atracţie este nenulă, şi anume:

$$F_{2_\Omega} = km \cdot \iiint_\Omega \frac{\rho(z-a)}{\left[x^2+y^2+(z-a)^2\right]^{3/2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

unde Ω este domeniul de la punctul (iii).

Folosind teorema lui Fubini şi transformarea în coordonate polare obţinem:

$$\begin{aligned} F_{z_\Omega} &= km\rho \cdot \int_{-R}^{R} \left(\iint_{x^2+y^2 \le R^2-z^2} \frac{z-a}{\left(x^2+y^2+(z-a)^2\right)^{3/2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}z = \\ &= km\rho \cdot \int_{-R}^{R} \left(\frac{z-a}{|z-a|} - \frac{z-a}{\sqrt{R^2-2az+a}} \right) \mathrm{d}z. \end{aligned} \quad \textbf{(7.5)}$$

Cum:

$$\int_{-R}^{R} \frac{z-a}{|z-a|} \mathrm{d}z = \int_{-R}^{R} \text{sgn}(z-a) \mathrm{d}z = \begin{cases} -2R, \text{ dacă } a \ge R \\ -2a, \text{ dacă } a < R \end{cases} \quad \textbf{(7.6)}$$

şi, cu ajutorul schimbării de variabilă $t = \sqrt{R^2 - 2az + a^2}$, a doua integrală are valoarea:

$$\int_{-R}^{R} \frac{z-a}{\sqrt{R^2-2az+a^2}} \mathrm{d}z = \begin{cases} \frac{2}{3}\frac{R^3}{a^2} - 2R, \text{ dacă } a \ge R; \\ -\frac{4}{3}a, \text{ dacă } a < R. \end{cases} \quad \textbf{(7.7)}$$

Din **(7.5)**, **(7.6)** şi **(7.7)** găsim că

$$F_{z_\Omega} = \begin{cases} -\frac{4\pi}{3} R^3 km\rho \frac{1}{a^2}, \text{ dacă } a \ge R; \\ -\frac{4\pi}{3} \pi a\, km\rho, \text{ dacă } a < R. \end{cases}$$

Cum $F_{x_\Omega} = F_{y_\Omega} = 0$ forţa de atracţie va fi îndreptată înspre centrul sferei.

Observație. Un punct M care se găsește în afara sferei $(a \geq R)$ este atras cu aceeaşi forță de atracție ca oricare alt punct egal depărtat de centrul sferei, ca şi cum toată masa sferei $\frac{4\pi}{3}R^3\rho$ ar fi concentrată în centrul sferei.

Pe de altă parte, forța de atracție exercitată de o sferă de rază R asupra unui punct M aflat în interiorul ei este aceeaşi pentru toate punctele egal depărtate de centrul sferei şi nu depinde de dimensiunea R a sferei. Altfel spus, stratul sferei exterior nu exercită nici o influență asupra unui punct interior.

21 Să se calculeze momentele de inerție J_x şi J_z ale corpului Ω mărginit de suprafață tirbuşon din figură şi a cărui reprezentare parametrică este:

$$\sigma = \partial\Omega : \begin{cases} x = a\cos u \cos v, \ u \in [0, 2\pi]; \\ y = a \sin u \cos v, \ v \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \ a, b \in \mathbb{R}_+^*; \\ z = a \sin v + bu, \end{cases}$$

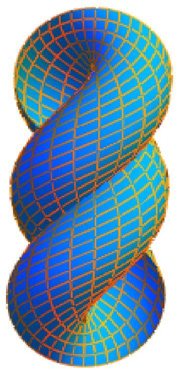


Fig. 7.5

Rezolvare.

Momentul de inerție J_z are expresia

$$J_z = \iiint_\Omega \left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \ .$$

Folosind transformarea de coordonate

$$T = \begin{cases} x = \rho \cos u \cos v, \ u \in [0, 2\pi] \\ y = \rho \sin u \cos v, \ v \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ z = \rho \sin v + bu, \ \rho \in [0, a] \end{cases}$$

al cărui Jacobian este:

$$J=\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,u,v)}=\rho^2\cos v>0,\ \forall(u,v,\rho)\in[0,2\pi]\times\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\times(0,a).$$

Folosind teorema de schimbare de variabile se obține

$$J_2=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\int_0^a\left(\int_0^{2\pi}\rho^4\cos^3 v\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}v=2\pi\cdot\frac{a^5}{5}\cdot\frac{4}{3}=\frac{8\pi}{15}a^5.$$

În mod similar:

$$J_x=\iiint_\Omega\left(y^2+z^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$$

$$=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\int_0^a\left(\int_0^{2\pi}\rho^2\cos v\left(\rho^2\sin^2 u\cos^2 v+\rho^2\sin^2 v+2\rho bu\sin v+b^2u^2\right)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}v=$$

$$=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\int_0^a\left(\pi\rho^4\cos^3 v+2\rho^4\pi\cos v\sin^2 v+4\pi^2 b\rho^3\cos v\sin v+\frac{8\pi^3}{3}\rho^2b^2\cos v\right)\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}v=$$

$$=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\pi\frac{a^5}{5}\cos^3 v+\frac{2\pi}{5}a^5\cos v\sin^2 v+a^4\pi^2 b\sin v\cos v+\frac{8\pi^3}{9}a^3b^2\cos v\right)\mathrm{d}v=$$

$$=\frac{8}{15}\pi a^5+\frac{16\pi^3}{9}a^3b^2.$$

22 Să se calculeze integrala $\iiint_V\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, domeniul V fiind limitat de suprafețele $x^2+y^2=z^2;\ z=1$.

Rezolvare.

$$\iiint_V\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_{pr_{xOy}V}\left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$

$$=\iint_{x^2+y^2\le 1}\sqrt{x^2+y^2}\left(1-\sqrt{x^2-y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

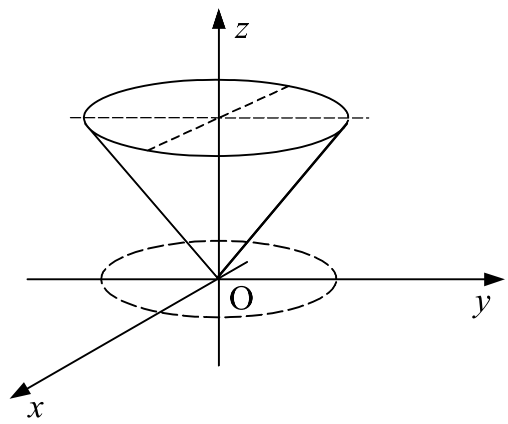


Fig. 7.6

Trecând la coordonate polare $\begin{cases} x = \rho\cos\theta, & \rho \in [0, \infty); \\ y = \rho\sin\theta, & \theta \in [0, 2a), \end{cases}$ domeniul $D = \left\{(x, y) \middle| x^2 + y^2 \le 1\right\}$ devine $\Delta = \left\{(\rho, \theta) \middle| \rho \in (0, 1], \theta \in [0, 2\pi)\right\}$ şi deoarece Jacobianul transformării este $\rho \neq 0$ obținem că:

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} \sqrt{x^2 + y^2}\left(1 - \sqrt{x^2 + y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho^2(1 - \rho)\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{6}.$$

23 Să se calculeze

$$\iiint\limits_D \left[2\left(x^2 + y^2\right) + 3az - 5a^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

dacă

$$D := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \middle| x^2 + y^2 - az \le 0; x^2 + y^2 + z^2 - 2a \le 0\right\}.$$

Rezolvare. Paraboloidul de rotație $x^2 + y^2 - az = 0$ şi sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2a^2$ se intersectează după cercul $z = a; x^2 + y^2 = a^2$. Ecuațiile proiecției cercului de secțiune pe planul xOy sunt $z = 0$ şi $x^2 + y^2 = a^2$.

Deci:

$$\iiint\limits_V \left[2\left(x^2+y^2\right)+3az-5a^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}\left\{\int_{\frac{x^2+y^2}{a}}^{\sqrt{2a^2-x^2-y^2}}\left[2\left(x^2+y^2\right)+3az-5a^2\right]\mathrm{d}z\right\}\mathrm{d}z\mathrm{d}y=$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}\left(2\left(x^2+y^2\right)-5a^2\right)\left(\sqrt{2a^2-x^2-y^2}-\frac{x^2+y^2}{a}\right)+$$

$$+\frac{3a}{2}\left[2a^2-x^2-y^2-\frac{\left(x^2+y^2\right)^2}{a^2}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^a\left(2\rho^3-5a^2\rho\right)\left(\sqrt{2a^2-\rho^2}+\frac{\rho^2}{a}\right)+\frac{3a\rho}{2}\left[2a^2-\rho^2-\frac{\rho^4}{a^2}\right]\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=\frac{139}{60}a^5\pi.$$

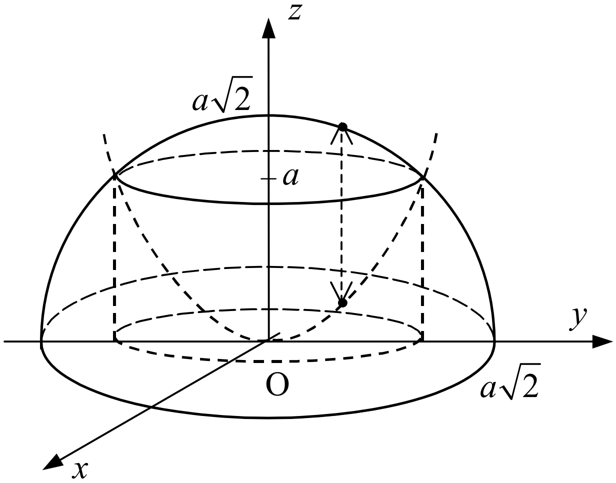


Fig. 7.7

24 Să se calculeze valoarea integralei

$$\iiint\limits_D x^P y^q z^r\left(1-x-y-z\right)^s\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\ \ p,q,r,s>0,$$

unde $D=\left\{\left(x,y,z\right)\in\mathbb{R}^3\middle|x+y+z-1\le 0,\ x,y,z\ge 0\right\}$.

Rezolvare. Funcția integrant este continuă şi domeniul este simplu în raport cu Oz.

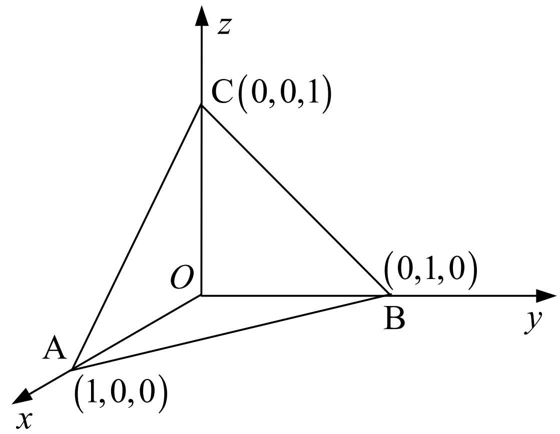


Fig. 7.8

Folosind teorema lui Fubini deducem

$$\iiint_D x^p y^q z^r (1-x-y-z)^s \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_{\mathrm{AOB}} \left(\int_0^{1-x-y} x^p y^q z^r (1-x-y-z)^s \,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}z\mathrm{d}y .$$

Făcând în această integrală schimbarea de variabilă $z=(1-x-y)u$, integrala devine:

$$I = \iint_{\mathrm{AOB}} x^p y^q \left(\int_0^1 (1-x-y)^{r+s+1} u^r (1-u)^s \,\mathrm{d}u \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$= B(r+1,s+1) \int_0^1 \int_0^{1-x} x^p y^q (1-x-y)^{r+s+1} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Cu schimbarea de variabilă $y=(1-x)v$ integrala devine

$$I = B(r+1,s+1) \int_0^1 \int_0^1 x^p (1-x)^{q+r+s+2} v^q (1-v)^{r+s+1} \,\mathrm{d}v\mathrm{d}x =$$

$$= B(r+1,s+1) B(q+1,r+s+2) B(p+1,q+r+s+3) =$$

$$= \frac{\Gamma(r+1)\Gamma(s+1)\Gamma(q+1)\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+q+r+s+4)}.$$

25 Să se afle volumul corpului Ω limitat de suprafețele $x^2+y^2=az$ şi $z=2a-\sqrt{x^2+y^2}$ $(a>0)$.

Rezolvare. Paraboloidul de rotație $z=\dfrac{x^2+y^2}{a}$ şi conul $z=2a-\sqrt{x^2+y^2}$ se intersectează după cercul $z=a$ $x^2+y^2=a^2$ a cărui proiecție în planul $x\mathrm{O}y$ este $z=0,\ x^2+y^2=a^2$.

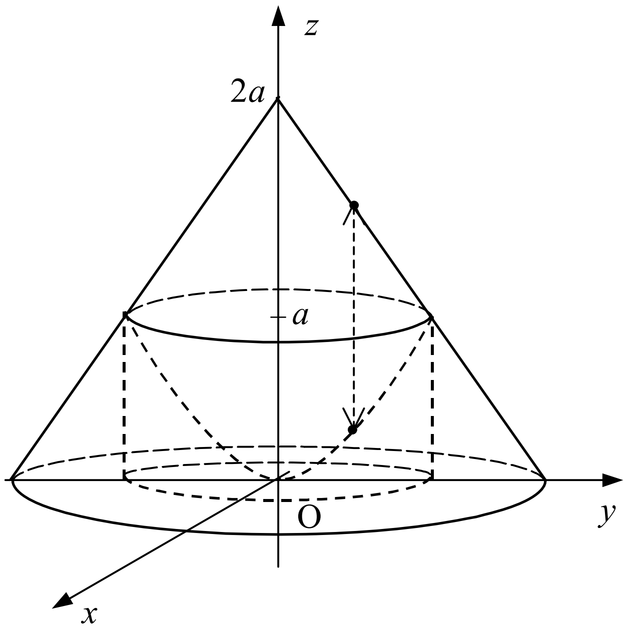


Fig. 7.9

În aceste condiții volumul corpului Ω va fi

$$\iint_{x^2+y^2\le a^2}\left(\int_{\frac{x^2+a^2}{a}}^{2a-\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$

$$=\iint_{x^2+y^2\le a^2}\left(2a-\sqrt{x^2+y^2}-\frac{x^2+a^2}{a}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{a}\left[2a\rho-\rho^2-\frac{\rho^3}{a}\right]\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=\frac{5\pi a^3}{6}.$$

26 Să se stabilească în ce raport este împărțit volumul sferei $x^2+y^2+z^2=4az$ de suprafața $x^2+y^2+az=4a^2$.

Rezolvare. Sfera $x^2+y^2+(z-2a)^2=4a^2$ se intersectează cu paraboloidul de rotație $x^2+y^2+az=4a^2$ după cercul de ecuație $z=a,\ x^2+y^2=3a^2$.

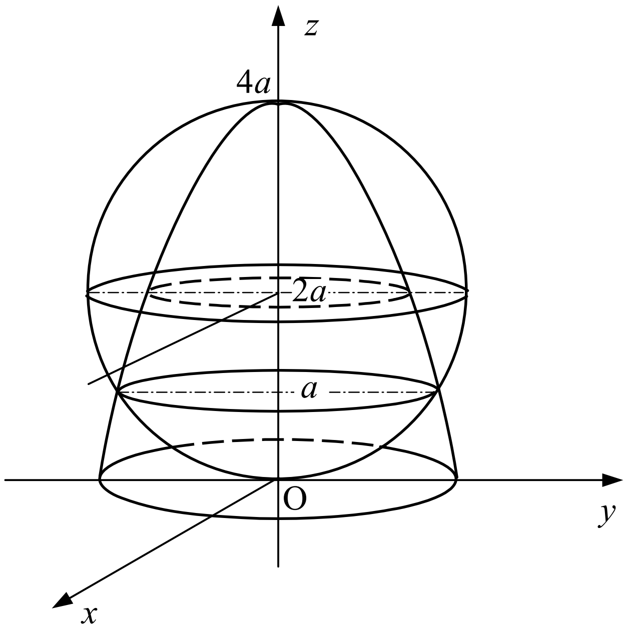


Fig. 7.10

Volumul interior paraboloidului şi sferei se proiectează în planul $x\mathrm{O}y$ pe domeniul $D=\left\{(x,y)\middle| x^2+y^2\leq 3a^2\right\}$. Acest volum V_1 se va calcula cu integrala

$$\iint_D\left(\int_{2a-\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}^{4a-\frac{x^2+y^2}{a}}\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$

$$=\iint_D 2a-\frac{x^2+y^2}{a}+\sqrt{4a^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Considerând în această integrală transformarea în coordonate polare

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta, & \rho>0,\\ y=\rho\sin\theta, & \theta\in[0,2\pi),\end{cases}$$

va rezulta

$$V_1=\int_0^{2\pi}\int_0^{a\sqrt{3}}2a\rho-\frac{\rho}{a}+\rho\sqrt{4a^2-\rho^2}\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=\frac{37a^3}{6}\pi.$$

Cum volumul sferei este $V=\dfrac{4\pi 8a^3}{3}=\dfrac{32\pi a^3}{3}$ rezultă că volumul interior sferei şi exterior paraboloidului va fi egal cu $V_2=\dfrac{27\pi a^3}{6}$.

Raportul celor două volume va fi deci

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{37}{27}.$$

27 Să se calculeze volumul corpului Ω limitat de suprafețele $x^2+y^2+z^2=2az$ şi $x^2+y^2 \le z^2$.

Rezolvare. Sfera $x^2+y^2+(z-a)^2=a^2$ intersectează conul $z^2=x^2+y^2$ după curba $z=a,\ x^2+y^2=a^2$ care se proiectează în planul xOy în curba $z=0,\ x^2+y^2=a^2$. În aceste condiții volumul corpului limitat de cele două suprafețe va fi

$$V=\iiint_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_{x^2+y^2\le a^2}\left(\int_{a-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{a}\left(\rho^2-a\rho+\rho\sqrt{a^2-\rho^2}\right)\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\frac{a^3}{3}-\frac{a^3}{2}+\frac{1}{3}a^3\mathrm{d}\theta=\frac{\pi a^3}{3}.$$

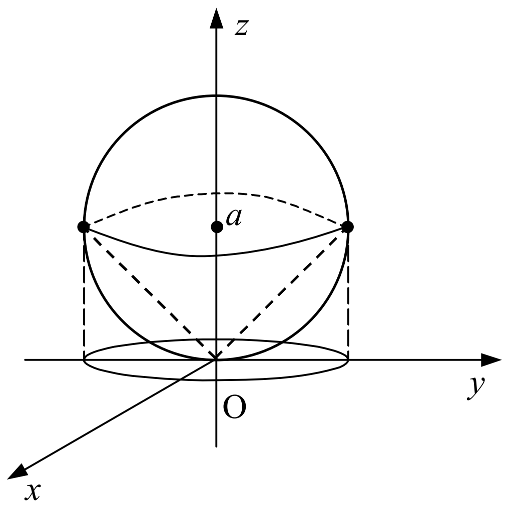


Fig. 7.11

28 Să se calculeze volumul corpului cuprins între suprafețele $z=4-y^2,\ z=y^2+2$ şi $x=-1, x=2$.

Rezolvare. Corpul cuprins între cilindrii $z=4-y^2$ şi $z=y^2+2$ se proiectează în planul yOz în domeniul ABCD.

În aceste condiții volumul corpului va fi

$$V=\iiint_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_{-1}^{2}\left(\int_{-1}^{1}\left(\int_{y^2+2}^{4-y^2}\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=$$

$$=\int_{-1}^{2}\left(\int_{-1}^{1}\left(2-2y^2\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\left(4-\frac{4}{3}\right)3=8.$$

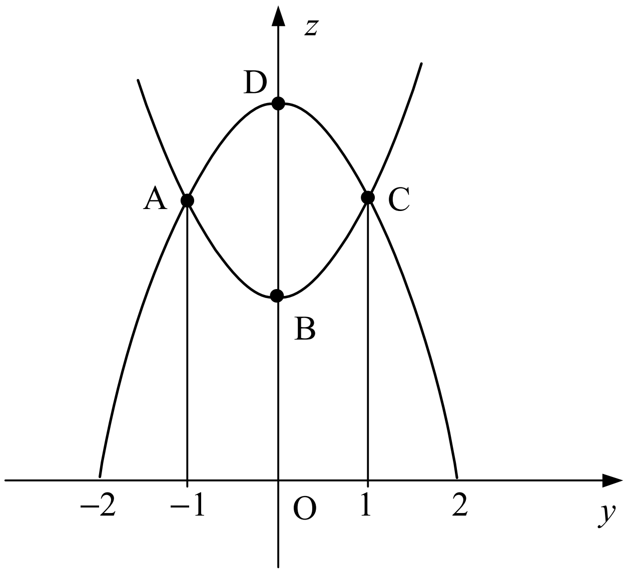


Fig. 7.12

29 Determinați centrul de greutate al unui corp având forma unei semisfere $z \geq 0$ şi $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ ştiind că densitatea într-un punct oarecare al solidului este proporțională cu distanța de la acest punct la centrul sferei.

Rezolvare. Coordonatele centrului de greutate se calculează cu ajutorul formulelor:

$$x_G = \frac{\iiint\limits_{\Omega} \gamma(x,y,z)\, x\,dx\,dy\,dz}{\iiint\limits_{\Omega} \gamma(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}$$

$$y_G = \frac{\iiint\limits_{\Omega} \gamma(x,y,z)\, y\,dx\,dy\,dz}{\iiint\limits_{\Omega} \gamma(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}$$

$$z_G = \frac{\iiint\limits_{\Omega} \gamma(x,y,z)\, z\,dx\,dy\,dz}{\iiint\limits_{\Omega} \gamma(x,y,z)\,dx\,dy\,dz},$$

unde $\gamma(x,y,z)$ este densitatea corpului Ω în punctul (x,y,z).

Trecând la coordonate sferice, vom obține relațiile

$$M=\iiint_{\Omega}k\cdot\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi}\int_0^{a}k\cdot\rho\cdot\rho^2\sin\theta\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta=$$

$$=k\frac{a^4}{4}\cdot 2\pi\cdot\left(-\cos\theta\right)\Big|_0^{\pi/2}=\frac{k\pi a^4}{2}$$

$$M_x=\iiint_{\Omega}x\cdot k\cdot\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$$

$$=k\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi}\int_0^{a}\rho\sin\theta\cos\varphi\cdot\rho^3\sin\theta\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta=0$$

$$M_y=\iiint_{\Omega}y\cdot k\cdot\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$$

$$=k\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi}\int_0^{a}\rho\sin\theta\sin\varphi\cdot\rho^3\sin\theta\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta=0$$

$$M_z=\iiint_{\Omega}z\cdot k\cdot\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=k\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi}\int_0^{a}\rho\cos\theta\rho^3\sin\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta=$$

$$=k\frac{a^5}{5}2\pi\left(-\frac{\cos 2\theta}{4}\right)\Big|_0^{\pi/2}=\frac{ka^5\pi}{5}.$$

Obținem deci $x_G=0,\ y_G=0$ şi $z_G=\dfrac{2a}{5}$.

30 Calculați integrala

$$\int_0^{2r}\left(\int_{-\sqrt{2rx-x^2}}^{\sqrt{2rx-x^2}}\left(\int_0^{\sqrt{4r^2-x^2-y^2}}3\left(x^3+y^2\right)\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x,$$

determinând domeniul de integrare.

Rezolvare. Domeniul de integrare Ω este determinat de intersecția cilindrului $x^2+y^2=2rx$ cu semisfera $x^2+y^2+z^2=4r^2\ (z\geq 0)$.

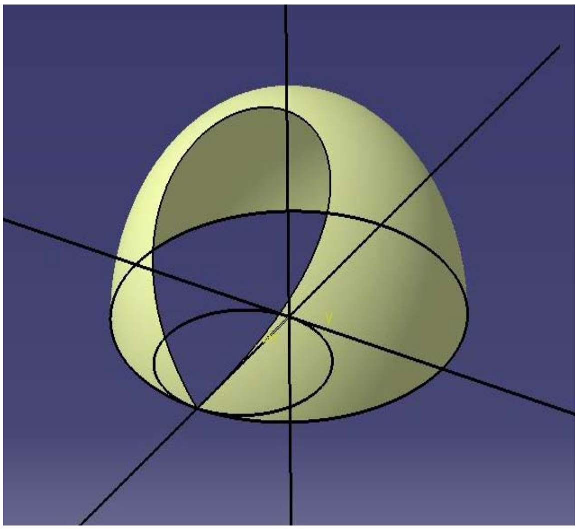


Fig. 7.13

Trecând la coordonate cilindrice

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta, & \rho\geq 0, \\ y=\rho\sin\theta, & \theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right], \\ z=z, & z\in\mathbb{R}, \end{cases}$$

integrala devine

$$\iiint_{\Omega} 3\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_{x^2+y^2\leq 2rx}\left(3\left(x^2+y^2\right)\int_0^{\sqrt{4r^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)=$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{2r\cos\theta}3\rho^2\sqrt{4r^2-\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\right)=$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{2r\cos\theta}3\rho^3\sqrt{4r^2-\rho^2}\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\theta=r^5\left(\frac{1036}{75}+\frac{64}{5}\pi\right).$$

31 Să se calculeze integrala

$$\iiint_{\Omega}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

dacă Ω este domeniul compact mărginit de elipsoidul $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\leq 0$.

Rezolvare. Trecând la coordonate sferice generalizate

$$\begin{cases} x = a\rho\sin\theta\cos\varphi, & \rho\in[0,1], \\ y = b\rho\sin\theta\sin\varphi, & \theta\in[0,\pi], \\ z = c\rho\cos\theta, & \varphi\in[0,2\pi], \end{cases}$$

Jacobianul transformării este $J = abc\rho^2\sin\theta$ şi integrala devine

$$J = abc\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1\sqrt{1-\rho^2}\cdot\rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\varphi\,d\theta = abc\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi}{16}\sin\theta\,d\varphi\,d\theta = \frac{\pi^2}{4}abc.$$

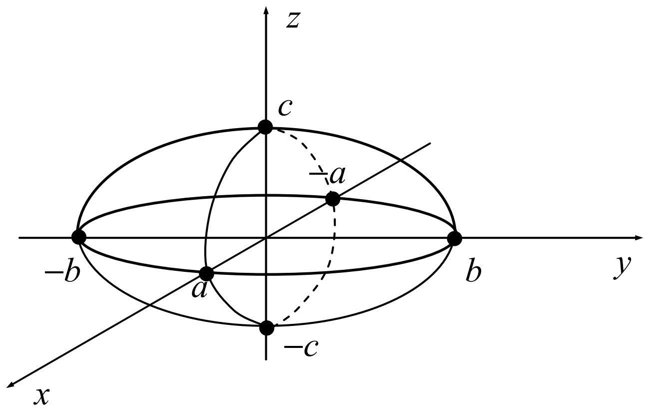


Fig. 7.14

7.3 TEMĂ DE CONTROL

Să se calculeze volumele domeniilor din $\mathbb{R}^3$:

1. $V = \left\{(x,y,z)\middle| x^2+y^2\le a^2, 0\le z\le x^2+y^2\right\}$.

Răspuns. $\frac{\pi a^4}{2}$.

2. $V = \left\{(x,y,z)\middle| x^2+y^2+z^2\le 5, x^2+y^2\le 4z\right\}$.

Răspuns. $\frac{2\pi}{3}\left(5\sqrt{5}-4\right)$.

3. Să se afle volumul unui cilindru eliptic drept a cărui axă coincide cu axa Ox, înălțimea fiind egală cu $2a$, iar ecuația bazei fiind $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$.

Răspuns. $2\pi abc$.

4. Să se afle volumul corpului situat în primul octant şi delimitat de suprafețele:

$$x^2+y^2=R^2,\ z=0,\ z=1,\ y=x \text{ şi } y=x\sqrt{3}.$$

Răspuns. $\dfrac{\pi R^2}{24}$.

Să se calculeze:

5. $\displaystyle\iiint_V 45x^2y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, unde

$$V=\{(x,y,z)\,|\,x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0,\ 4x+2y+z\leq 8\}.$$

Răspuns. 128.

6. $\displaystyle\iiint_V \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(1+x+y+z)^n},\ n\geq 2,\ n\in\mathbb{N}$, unde

$$V=\{(x,y,z)\,|\,x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0,\ x+y+z\leq 1\}.$$

Răspuns. $\begin{cases} \dfrac{3}{2}-\ln 2, & \text{dacă } n=2; \\ \dfrac{1}{2}\left(\ln 2-\dfrac{5}{8}\right), & \text{dacă } n=3; \\ \dfrac{2^n-n^2+n-2}{(n-1)(n-2)(n-3)2^n}, & \text{dacă } n\geq 4. \end{cases}$

7. $\displaystyle\iiint_V z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z\mathrm{d}y$, unde domeniul V este mărginit de sferele $x^2+y^2+z^2=R^2$ şi $x^2+y^2+(z-R)^2=R^2$.

Răspuns. $\dfrac{5\pi R^4}{24}$.

8. Să se calculeze coordonatele centrului de greutate a jumătății superioare a unui elipsoid omogen de semiaxe a,b,c.

Răspuns. $x_G=0;\ y_G=0;\ z_G=\dfrac{3c}{8}$.

9. Să se calculeze potențialul newtonian în punctul $\mathrm{P}(a,b,c)$ al unui corp omogen de densitate constantă ρ_0, care ocupă în spațiu domeniul

$$V=\left\{(x,y,z)\middle|x^2+y^2+z^2\le R^2,\ a^2+b^2+c^2>R^2\right\}.$$

Răspuns. $\dfrac{4\pi R^3\rho_0}{3\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

10. Să se calculeze

$$\iiint\limits_{\mathbb{R}^3} \mathrm{e}^{-\left(x^2+y^2+z^2\right)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z .$$

Răspuns. $\pi\sqrt{\pi}$.

11. Să se calculeze $\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ dacă domeniul

$$\Omega=\left\{(x,y,z)\middle|z\ge 0,\ r^2\le x^2+y^2+z^2\le R^2\right\},\ r,R\in\mathbb{R}_+^*;\ r<R .$$

Răspuns. $\dfrac{4}{15}\pi\left(R^5-r^5\right)$.

12. Să se calculeze volumul corpului mărginit de sfera $x^2+y^2+z^2=R^2$ şi paraboloidul $x^2+y^2=R(R-2z),\ z\ge 0,\ R>0$.

Răspuns. $\dfrac{5}{12}\pi R^3$.

13. Să se calculeze volumul corpului mărginit de suprafețele următoare:

$$x^2+y^2+z^2=1;\ x^2+y^2+z^2=16;\ z^2=x^2+y^2;$$
$$x=0;\ y=0;\ z=0\quad (x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0).$$

Răspuns. $\dfrac{21\left(2-\sqrt{2}\right)}{4}\pi$.

14. Să se calculeze $\iiint\limits_{\Omega}\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ dacă domeniul Ω este limitat de suprafața $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

Răspuns. $\frac{4}{5}\pi abc$.

15. Să se calculeze volumul corpului Ω limitat de suprafețele

$$az = x^2 + y^2,\ z = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (a > 0).$$

Răspuns. $\frac{\pi a^3}{6}$.

16. Să se calculeze volumul corpului Ω limitat de suprafețele $az = a^2 - x^2 - y^2,\ z = a - x - y,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ a > 0$.

Răspuns. $\frac{a^3}{24}(2 + 3\pi)$.

17. Să se calculeze volumul cilindrului $x^2 + y^2 = 2ax$ cuprins între planul xOy şi suprafața $x^2 + y^2 = 2az$.

Răspuns. $\frac{3}{4}\pi a^3$.

18. Să se calculeze volumul corpului limitat de sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ şi suprafața $x^2 + y^2 = 3z$ (interiorul acestei suprafețe).

Răspuns. $\frac{19\pi}{6}$.

19. Din porțiunea bilei $x^2 + y^2 + z^2 \le c$ aflată în primul octant $(x \ge 0;\ y \ge 0;\ z \ge 0)$ se decupează un corp OABC limitat de planele de coordonate şi de planul $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0 \quad (a \le c;\ b \le c) \quad a, b, c > 0$.

Determinați masa acestui corp dacă în fiecare punct densitatea sa este egală cu z.

Răspuns. $\frac{ab}{24}\left(6c^2 - a^2 - b^2\right)$.

20. Fie funcția $f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = \left[|x| + |y| + |z|\right]$, unde $D = [-1, 1]^3$.

(i) Dacă $\sigma \in \mathcal{D}(D)$ este o diviziune de forma $\sigma = \{d_h\}_{k=\overline{0,1}}$

$$d_k = \{(x,y,z) \in D \mid k \le |x| + |y| + |z| < k+1\},\ k = \overline{0,1},$$

să se calculeze sumele Darboux superioară şi inferioară corespunzătoare diviziunii σ şi funcţiei f.

(ii) Să se precizeze dacă f este Darboux integrabilă pe D şi în caz afirmativ să se calculeze $\iiint\limits_D f$.

Răspuns. $\iiint\limits_D f = \dfrac{20}{3}$.

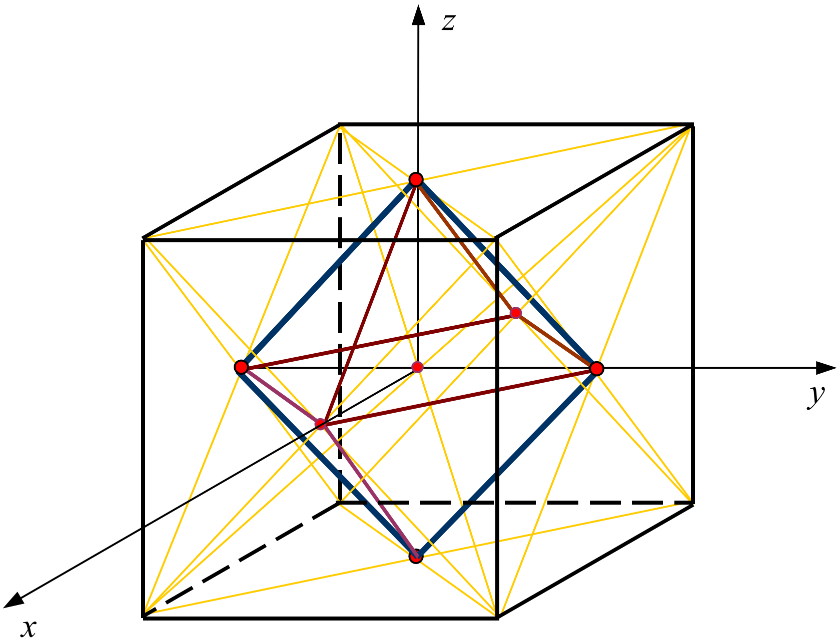


Fig. 7.15

Indicaţie. $S(f,z) = M_0 \,\text{măs}\, d_0 + M_1 \,\text{măs}\, d_1 = \left(2^3 - \dfrac{4}{3}\right) = \dfrac{20}{3} = s(f,\sigma)$.

21. Să se arate că funcţia $f:[0,1]^3 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{1}{q}, \text{ dacă } (x,y,z) \in Q^3 \cap [0,1]^3 \text{ şi } z = \dfrac{p}{q}, \text{ unde } p,q \in \mathbb{N} \text{ şi } (p,q) = 1 \\ 0, \text{ în caz contrar} \end{cases}$$

este Darboux integrabilă pe $[0,1]^3$ şi $\iiint\limits_{[0,1]^3} f = 0$.

22. Fie funcţia $f:[-1,1]^3 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{xy+yz+zx}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}, & (x,y,z)\in[-1,1]^3-\{(0,0,0)\};\\ 0, & (x,y,z)=(0,0,0).\end{cases}$$

Să se arate că f nu este Riemann integrabilă pe $[-1,1]^3$, dar integralele iterate există şi sunt egale.

23. Să se determine valoarea integralei $I=\iiint\limits_{\Omega} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, unde Ω este partea comună a două sfere de ecuații:

$$S_1:\ x^2+y^2+z^2\le R^2;$$
$$S_2:\ x^2+y^2+z^2\le 2Rz,\ R>0.$$

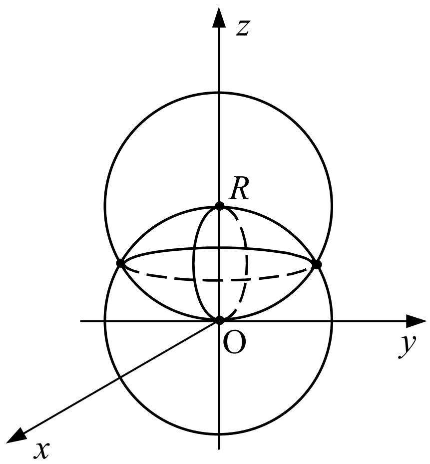


Fig. 7.16

Răspuns. $I=\dfrac{59}{480}\pi R^5$.

24. Să se arate cu funcția $f:[-1,1]^3\to\mathbb{R}$

$$f(x,y,z)=\operatorname{sgn}x+\operatorname{sgn}y+\operatorname{sgn}z$$

este integrabilă pe $[-1,1]^3$ şi să se calculeze $\iiint\limits_{[-1,1]^3} f$.

Răspuns. $\iiint\limits_{[-1,1]^3} f=4$.

25. Folosind coordonatele sferice să se determine volumul corpului mărginit de suprafața:

$$\sigma : \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)^2 = \frac{x}{h},\ a, b, c \in \mathbb{R},\ h > 0 .$$

Răspuns. $\dfrac{\pi \cdot a^2 bc}{3h}$.

26. Folosind coordonatele sferice generalizate să se calculeze volumul corpului mărginit de suprafața

$$\sigma : \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)^2 = \frac{z}{\ell},\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0,\ a, b, c, \ell \in \mathbb{R}_+^* .$$

Răspuns. $\dfrac{abc^4}{60l^3}$.

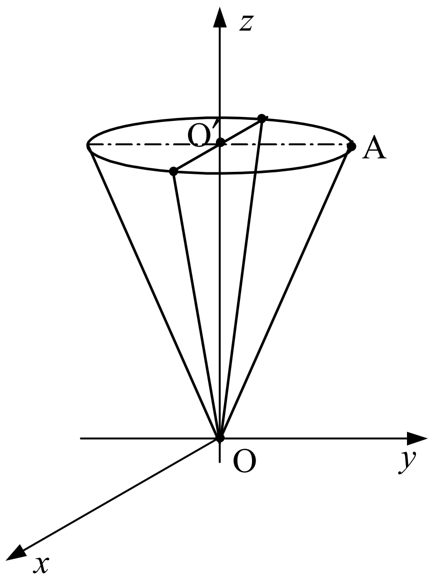
27. Să se afle momentele de inerție ale torului

$$T : \begin{cases} x = (a + r\cos\theta)\cos\varphi, & \theta \in [0, 2\pi]; \\ y = (a + r\cos\theta)\sin\varphi, & \varphi \in [0, 2\pi]; \qquad a > R > 0. \\ z = r\sin\theta, & r \in [0, R], \end{cases}$$

Răspuns. $\begin{cases} J_x = J_y = \dfrac{\pi^2 a R^2}{2}\left(4a^2 + 3R^2\right); \\ J_z = \dfrac{\pi^2}{4} R^2 a \left(4a^2 + 5R^2\right). \end{cases}$

28. **(i)** Să se determine potențialul Newtonian al unui con omogen în vârful său.

(ii) Să se determine forța de atracție Newtoniană cu care un punct situat în vârful unui con omogen este atras de con (vezi figura).



$\mathrm{OA} = \ell,\ \mathrm{O'A} = R,\ \mathrm{OO'} = h$

Fig. 7.17

Răspuns. $\begin{cases} P_{\Omega}(0,0,0) = \pi h(\ell - h)\rho; \\ F_{z_{\Omega}}(0,0,0) = \dfrac{2\pi h}{l}\rho(\ell - h). \end{cases}$

29. Determinați coordonatele centrului de greutate şi momentele de inerție ale piramidei formată de planele $x = 0,\ y = 0,\ z = 0;\ \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1;\ a,b,c \in \mathbb{R}_{+}^{*}$.

Răspuns. $\begin{cases} x_{\mathrm{G}} = \dfrac{a}{4},\ j_{\mathrm{G}} = \dfrac{b}{4},\ z_{\mathrm{G}} = \dfrac{c}{4}; \\ J_x = \dfrac{a^3bc}{60},\ J_y = \dfrac{b^3ac}{60},\ J_z = \dfrac{c^3ab}{60}; \\ J_0 = \dfrac{abc}{60}\left(a^2 + b^2 + c^2\right). \end{cases}$

MODULUL 9

INTEGRALA DE SUPRAFAȚĂ

8.1 BREVIAR TEORETIC

Definiția 8.1. Se numeşte pânză parametrizată netedă orice aplicație $s : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ de clasă C^1 pe mulțimea deschisă *D*.

În felul acesta oricărui punct $(u,v) \in D$ îi corespunde un punct $s(u,v)$ din $\mathbb{R}^3$ având coordonatele

$$\begin{cases} x = f(u,v) \\ y = g(u,v), \quad (u,v) \in D. \\ z = h(u,v) \end{cases}$$

Aceste relații se numesc ecuațiile parametrice ale pânzei *s* sau reprezentarea parametrică a pânzei *s*. Pânza *s* se numeşte simplă dacă *s* este injectivă. Mulțimea $S := s(D)$ se numeşte urma pânzei *s*. De multe ori notăm suprafața cu *S*.

Definiția 8.2. O pânză netedă $s : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$s(u,v) = \left(f(u,v), g(u,v), h(u,v)\right)$$

se numeşte nesingulară dacă în fiecare punct $(u,v) \in D$, matricea jacobiană a lui *s*

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial u} & \dfrac{\partial g}{\partial u} & \dfrac{\partial h}{\partial u} \\ \dfrac{\partial f}{\partial v} & \dfrac{\partial g}{\partial v} & \dfrac{\partial h}{\partial v} \end{pmatrix}$$

are rangul maxim, adică are rangul doi.

În spațiu alegem reperul ortogonal $Oxyz$ de versori i, j, k. Atunci punctul curent $\left(f(u,v), g(u,v), h(u,v)\right)$ al urmei lui *s* are vectorul de poziție *r* dat de relația

$$r(u,v) = f(u,v)i + g(u,v)j + h(u,v)k.$$

Să considerăm vectorii

$$\overline{r_u}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial u}(u,v)\overline{i} + \frac{\partial g}{\partial u}(u,v)\overline{j} + \frac{\partial h}{\partial u}(u,v)\overline{k},$$

$$\overline{r_v}(u,v)=\frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\overline{i}+\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\overline{j}+\frac{\partial h}{\partial v}(u,v)\overline{k}\,.$$

Fie $(u_0,v_0)\in D$. Planul care trece prin punctul $\mathrm{P}(x_0,y_0,z_0)$, unde $x_0=f(u_0,v_0)$, $y_0=g(u_0,v_0)$, $z_0=h(u_0,v_0)$, paralel cu vectorii $r_u(u_0,v_0)$ şi $r_v(u_0,v_0)$ se numeşte planul tangent la s în punctul (u_0,v_0). Acest plan are ecuația

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ \frac{\partial f}{\partial u}(u_0,v_0) & \frac{\partial g}{\partial u}(u_0,v_0) & \frac{\partial h}{\partial u}(u_0,v_0) \\ \frac{\partial f}{\partial v}(u_0,v_0) & \frac{\partial g}{\partial v}(u_0,v_0) & \frac{\partial h}{\partial v}(u_0,v_0) \end{vmatrix}=0\,.$$

Versorul-normală la suprafața s în punctul (u_0,v_0) este

$$\overline{n}(u_0,v_0)=\frac{\overline{r_u}(u_0,v_0)\times\overline{r_v}(u_0,v_0)}{\left\|\overline{r_u}(u_0,v_0)\times\overline{r_v}(u_0,v_0)\right\|},$$

unde

$$\overline{r_u}\times\overline{r_v}=\begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial h}{\partial u} \\ \frac{\partial f}{\partial v} & \frac{\partial g}{\partial v} & \frac{\partial h}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Dacă notăm cu

$$A=\frac{D(g,h)}{D(u,v)},\ B\frac{D(h,f)}{D(u,v)},\ A=\frac{D(f,g)}{D(u,v)},$$

observăm că

$$\left\|\overline{r_u}(u_0,v_0)\times\overline{r_v}(u_0,v_0)\right\|=\sqrt{A^2+B^2+C^2}$$

şi versorul-normalei la suprafața s în punctul (u_0,v_0) are expresia

$$\overline{n}=\frac{A\overline{i}+B\overline{j}+C\overline{k}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

unde am renunțat la specificarea punctului (u_0,v_0).

Dacă notăm cu

$$E=\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial h}{\partial u}\right)^2,$$
$$F=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial v}+\frac{\partial h}{\partial u}\frac{\partial h}{\partial v},$$
$$G=\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)^2,$$
atunci avem identitatea
$$A^2+B^2+C^2=EG-F^2>0.$$

Două pânze parametrizate netede $s:D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ şi $s_1:D_1\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ (D şi D_1 deschişi) se numesc echivalente şi se notează $s\sim s_1$, dacă există o funcție bijectivă $\varphi:D\to D_1$, $\varphi\in C^1(D)$, $\varphi^{-1}\in C^1(D)$, astfel încât jacobianul lui φ să fie strict pozitiv în fiecare punct al deschisului D şi $s_1\circ\varphi=s$. Funcția φ se numeşte schimbare de parametri.

Dacă $s\sim s_1$, atunci urmele celor două pânze parametrizate netede coincid. Relația „~” este o relație de echivalență în mulțimea pânzelor parametrizate netede.

Definiția 8.3. Se numeşte suprafață parametrizată netedă o clasă de echivalență de pânze parametrizate netede.

Să considerăm suprafața $s:D_1\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ netedă, definită pe mulțimea deschisă D_1, având reprezentarea parametrică
$$s:\begin{cases}x=f(u,v)\\ y=g(u,v),\quad (u,v)\in D_1.\\ z=h(u,v)\end{cases}$$

Dacă $D\subset D_1$ este un domeniu compact din $\mathbb{R}^2$, atunci mulțimea $s(D)=S$ reprezintă o porțiune din suprafața netedă dată. Presupunem că suprafața s este simplă şi nesingulară.

Definiția 8.4. Se numeşte aria porțiunii de suprafață $S\subset\mathbb{R}^3$ numărul real pozitiv:
$$\text{aria}\,S=\iint_D\|r_u\times r_v\|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\iint_D\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\iint_D\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Forma diferențială

$$\mathrm{d}\sigma = \left\| \overline{r}_u \times \overline{r}_v \right\| \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

se numeşte elementul de arie al suprafeței *S*.

Integrala dublă

$$\iint_D \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

este independentă de reprezentarea parametrică a suprafeței *S*.

Dacă suprafața *S* este dată explicit de ecuația

$$z = f(x,y),\ (x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2,$$

atunci

$$\text{aria}\, S = \iint_D \sqrt{1 + p^2 + q^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

unde

$$p = \frac{\partial f}{\partial x},\ q = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ o mulțime compactă şi suprafață netedă, simplă, nesingulară

$$s : \begin{cases} x = f(u,v) \\ y = g(u,v), \quad (u,v) \in D, \\ z = h(u,v) \end{cases}$$

unde $f, g, h \in \mathrm{C}^1(D)$. Să considerăm funcția $F : S \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ şi o diviziune $\delta = (s_1, s_2, ..., s_p)$ a suprafeței *S*. Definim suma

$$\sigma_\delta(F, \xi_k, n_k, \zeta_k) = \sum_{k=1}^{p} F(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \cdot \text{aria}\, s_k,$$

unde $(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \in s_k$, $1 \le k \le p$. Deoarece

$$\begin{cases} \xi_k = f(u_k, v_k) \\ \eta_k = g(u_k, v_k), \quad 1 \le k \le p, \\ \zeta_k = h(u_k, v_k) \end{cases}$$

rezultă că

$$\sigma_\delta(F, \xi_k, \eta_k, \zeta_k) = \sum_{k=1}^{p} F\left(f(u_k, v_k), g(u_k, v_k), h(u_k, v_k)\right) \cdot \text{aria}\, s_k.$$

Diviziunii δ a suprafeței *S* îi corespunde o diviziune Δ a domeniului *D*, iar porțiunilor de suprafață $s_1, s_2, ..., s_p$ le corespund subdomeniile $\delta_1, \delta_2, ..., \delta_p$. Aşadar, $(u_k, v_k) \in \delta_k$, $1 \le k \le p$.

Definiția 8.5. Dacă pentru orice şir de diviziuni $(\delta_n)_{n\ge1}$ ale suprafeței *S* cu proprietatea că $\|\delta_n\| \to 0$, şirul sumelor $(\sigma_{\delta_n})_{n\ge1}$ are o aceeaşi limită finită, atunci şirului $(\sigma_{\delta_n})_{n\ge1}$ se numeşte integrala de suprafață de primul tip pe suprafața *S* şi se notează

$$\iint_S F(x,y,z)\mathrm{d}\sigma.$$

Teorema 8.6. În condițiile de mai sus, dacă $F: S \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ este continuă atunci:

$$\iint_S F(x,y,z)\mathrm{d}\sigma = \iint_D F\big(f(u,v), g(u,v), h(u,v)\big)\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Dacă suprafața *S* este dată de

$$z = f(x,y),\ (x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2,$$

atunci

$$\iint_S F(x,y,z)\mathrm{d}\sigma = \iint_S F\big(x,y,f(x,y)\big)\sqrt{1+p^2+q^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

unde

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Propoziția 8.7.

a) Dacă *F* şi *G* sunt funcții continue pe un deschis care conține *S* şi α, β sunt constante reale, atunci:

$$\iint_S (\alpha F + \beta G)\mathrm{d}\sigma = \alpha\iint_S F\mathrm{d}\sigma + \beta\iint_S G\mathrm{d}\sigma.$$

b) Dacă *S* este juxtapunerea a două porțiuni disjuncte S_1, S_2 de suprafață, atunci:

$$\iint_S F\mathrm{d}\sigma = \iint_{S_1} F\mathrm{d}\sigma + \iint_{S_2} F\mathrm{d}\sigma.$$

c) Aria unei porțiuni de suprafață *S* este

$$\text{aria}\, S = \iint_S \mathrm{d}\sigma.$$

Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ o mulțime compactă și suprafața netedă simplă, nesingulară

$$s: \begin{cases} x = f(u,v) \\ y = g(u,v), \quad (u,v) \in D, \\ z = h(u,v) \end{cases}$$

unde $f, g, h \in \mathrm{C}^1(D)$. Fie $\mathrm{M}(x,y,z)$ un punct al lui $S = s(D)$. Putem considera în punctul M doi versori-normală la *S*:

$$\overline{n}_1 = \frac{A\overline{i} + B\overline{j} + C\overline{k}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \overline{n}_2 = -\frac{A\overline{i} + B\overline{j} + C\overline{k}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

având sensuri opuse.

Suprafața *S* se numește orientabilă dacă în fiecare punct din *S* este definit un versor-normală și aplicația

$$(x,y,z) \mapsto \overline{n}(x,y,z)$$

este continuă. Suprafața orientabilă *S* împreună cu unul din cei doi versori-normală se numește suprafață orientală.

O suprafață *S* în $\mathbb{R}^3$ se numește închisă dacă există o aplicație bijectivă

$$\varphi: \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| x^2 + y^2 + z^2 = 1 \right\} \to S,$$

astfel încât φ și φ^{-1} să fie continue (adică sfera unitate și suprafața *S* sunt homeomorfe).

Fie $S \subset \mathbb{R}^3$ o suprafață orientabilă. Dacă *S* este închisă, atunci în fiecare punct din *S* este definit versorul-normală. Notăm cu $\overline{n}_{\mathrm{e}}$ versorul normalei exterioare (care iese din domeniul mărginit de *S*) și cu $\overline{n}_{\mathrm{i}}$ versorul normalei interioare $(\overline{n}_{\mathrm{i}} = -\overline{n}_{\mathrm{e}})$. În primul caz, perechea $\{S, \overline{n}_{\mathrm{e}}\}$ se numește fața exterioară și se notează cu S_{e}, iar perechea $\{S, \overline{n}_{\mathrm{i}}\}$ se numește fața interioară și se notează cu S_{i}.

Dacă *S* este neînchisă, proiectabilă pe planul $x\mathrm{O}y$, atunci vom numi fața exterioară a suprafeței *S* în raport cu planul $\mathrm{O}xy$ perechea $\{S, \overline{n}_{\mathrm{e}}\}$, notată S_{e}, unde $\overline{n}_{\mathrm{e}}$ este versorul-normală care face un unghi ascuțit cu axa $\mathrm{O}z$. Fața interioară a suprafeței *S* va fi $\{S, \overline{n}_{\mathrm{i}}\}$, notată S_{i}, cealaltă față a lui *S*, adică fața pentru care versorul-normală face un unghi obtuz cu axa $\mathrm{O}z$.

Fie *C* conturul suprafeței *S* și Γ proiecția lui *C* pe planul $\mathrm{O}xy$. Pe *C* se pot considera două sensuri de parcurs. Sensul asociat suprafeței exterioare este acela care corespunde sensului direct (pozitiv) pe conturul Γ. Feței interioare i se asociază sensul invers (negativ). În acest mod se definește un sens de parcurs pe

conturul oricărei părți din suprafața S. Totodată am indus o orientare şi pe domeniul D din planul Ouv.

Dacă $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ sunt cosinuşii directori ai versorului-normală n la suprafața S atunci

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \cos\beta = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$
$$\cos\gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Fie $R = R(x, y, s) : S \to \mathbb{R}$ o funcție definită pe suprafața orientată S.

Definiția 8.8. Fie $F : V \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ o funcție vectorială continuă pe domeniul V, domeniu care conține suprafața S,

$$F(x,y,z) = P(x,y,z)\overline{i} + Q(x,y,z)\overline{j} + R(x,y,z)\overline{k}.$$

Integrala de suprafață de al doilea tip a funcției vectoriale F pe suprafața S_e sau fluxul câmpului vectorial F prin suprafața S_e sau fluxul câmpului vectorial F prin suprafața S_e, cu notația:

$$\iint_{S_e} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

sau

$$\Phi_{S_e}(F) = \iint_{S_e} F \cdot n\mathrm{d}\sigma$$

se defineşte prin egalitatea

$$\iint_{S_e} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{S} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\mathrm{d}\sigma.$$

În mod asemănător se defineşte

$$\iint_{S_i} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint_{S} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\mathrm{d}\sigma.$$

Utilizând regula de calcul a integralei de suprafață de primul tip, rezultă că

$$\iint_{S_e} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{S} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\mathrm{d}\sigma =$$
$$= \iint_{S} \frac{PA + QB + RC}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\mathrm{d}\sigma = \iint_{D} (PA + QB + RC)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

Am obținut regula de calcul a integralei de suprafață de al doilea tip

$$\iint_{S_e} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{S} (PA + Q\beta + RC)\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

unde

$$P = P\big(f(u,v), g(u,v), h(u,v)\big),$$

$$Q = Q\big(f(u,v), g(u,v), h(u,v)\big),$$

$$R = R\big(f(u,v), g(u,v), h(u,v)\big),$$

iar $A = A(u,v)$, $B = B(u,v)$, $C = C(u,v)$.

Dacă folosim scrierea vectorială, rezultatele anterioare devin:

$$\iint_{S_e} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{S} \overline{F} \cdot \overline{n}\mathrm{d}\sigma = \iint_{S} \overline{F} \cdot \frac{\overline{r}_u \times \overline{r}_v}{\|\overline{r}_u \times \overline{r}_v\|}\mathrm{d}\sigma =$$

$$= \iint_{S} \frac{(\overline{F}, \overline{r}_u, \overline{r}_v)}{\|\overline{r}_u \times \overline{r}_v\|}\mathrm{d}\sigma = \iint_{D} (\overline{F}, \overline{r}_u, \overline{r}_v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

unde produsul mixt este

$$(\overline{F}, \overline{r}_u, \overline{r}_v) = \begin{vmatrix} P & Q & R \\ \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial h}{\partial u} \\ \frac{\partial f}{\partial v} & \frac{\partial g}{\partial v} & \frac{\partial u}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

În cazul în care suprafața netedă este de ecuație $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D$.

Atunci versorul-normală $\overline{n}_e$, corespunzător feței exterioare S_e, este

$$\overline{n}_e = \frac{-p\overline{i} - q\overline{j} + \overline{k}}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}},$$

iar versorul-normală $\overline{n}_i$, corespunzător feței interioare S_i, este $\overline{n}_i = -\overline{n}_e$.

Să considerăm o placă materială neomogenă curbă, de grosime neglijabilă, care are forma dată de urma S a suprafeței s din spațiu. Presupune cunoscută în fiecare punct al plăcii materiale dată de funcția continuă $\rho(x,y,z)$. În acest caz, pentru placa materială se pot calcula:

a) masa M a plăcii:

$$M = \iint_{S} \rho(x,y,z)\mathrm{d}\sigma;$$

b) coordonatele centrului de greutate G al plăcii:

$$x_{\text{G}} = \frac{1}{M}\iint_S x\rho(x,y,z)\,\text{d}\sigma,$$

$$y_{\text{G}} = \frac{1}{M}\iint_S y\rho(x,y,z)\,\text{d}\sigma,$$

$$z_{\text{G}} = \frac{1}{M}\iint_S z\rho(x,y,z)\,\text{d}\sigma;$$

c) momentele de inerție ale plăcii materiale în raport cu axele de coordonate:

$$I_{\text{O}x} = \iint_{(S)}\left(y^2+z^2\right)\rho(x,y,z)\,\text{d}\sigma,$$

$$I_{\text{O}y} = \iint_{(S)}\left(x^2+z^2\right)\rho(x,y,z)\,\text{d}\sigma,$$

$$I_{\text{O}z} = \iint_{(S)}\left(x^2+y^2\right)\rho(x,y,z)\,\text{d}\sigma;$$

d) momentele de inerție ale plăcii materiale în raport cu planele de coordonate:

$$I_{x\text{O}y} = \iint_{(S)} z^2\rho(x,y,z)\,\text{d}\sigma,$$

$$I_{y\text{O}z} = \iint_{(S)} x^2\rho(x,y,z)\,\text{d}\sigma,$$

$$I_{x\text{O}z} = \iint_{(S)} y^2\rho(x,y,z)\,\text{d}\sigma;$$

e) momentele de inerție ale plăcii materiale în raport cu originea:

$$I_{\text{O}} = \iint_{(S)}\left(x^2+y^2+z^2\right)\rho(x,y,z)\,\text{d}\sigma.$$

8.2 PROBLEME REZOLVATE

1 Să se stabilească dacă paraboloidul eliptic

$$z = \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2},\ a,b\in\mathbb{R}^*$$

este o suprafață orientabilă.

Rezolvare. Observăm că $\overline{n}=\left(-\frac{\partial z}{\partial x},-\frac{\partial z}{\partial y},1\right)=\left(-\frac{2x}{a^2},-\frac{2y}{b^2},1\right)$ şi $\|\overline{n}\|=\sqrt{\frac{4x^2}{a^4}+\frac{4y^2}{b^4}+1}\neq 0$ pentru orice $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Deoarece $\overline{n}=\overline{n}(x,y)$ este o funcție continuă nenulă pe $\mathbb{R}^2$, suprafața este orientabilă.

2 Să se stabilească dacă hiperboloidul cu două pânze

$$S:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}+1=0,\ a,b,c\in\mathbb{R}^*$$

este o suprafață orientabilă.

Rezolvare. $\overline{n}=\left(\frac{2x}{a^2},\frac{2y}{b^2}-\frac{2z}{c^2}\right)\neq(0,0,0)$ pentru orice $(x,y,z)\in S$. Normala $\overline{n}$ este o funcție continuă, deci S este orientabilă.

3 Să se calculeze aria suprafeței $x=\sqrt{y^2+z^2}$ situată în interiorul cilindrului $x^2+y^2=a^2,\ a>0$.

Rezolvare. Din simetria figurii față de planul xOy, Aria $S=2\iint\limits_S \mathrm{d}\sigma$, unde S este suprafața care are reprezentarea parametrică

$$z=\sqrt{x^2-y^2},\ (x,y)\in D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\leq a^2\right\}.$$

Observăm că

$$\mathrm{d}\sigma=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\text{Aria } S=2\iint\limits_D\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}\mathrm{d}\theta\int\limits_0^a\rho\mathrm{d}\rho+2\int_{\frac{7\pi}{4}}^{2\pi}\frac{\cos\theta}{\sqrt{1-2\sin^2\theta}}\mathrm{d}\theta$$

$$\int_0^a\rho\mathrm{d}\rho=\frac{a^2}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\sqrt{2}\sin\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+\frac{a^2}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\sqrt{2}\sin\theta\right)\Big|_{\frac{7\pi}{4}}^{2\pi}=\frac{a^2\pi}{\sqrt{2}}.$$

4 Să se calculeze aria decupată de cilindrul $x^2+y^2-ay=0,\ a>0$, în emisfera superioară $x^2+y^2+z^2=a^2$.

Rezolvare. Ecuația emisferei superioare este $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ şi

$$\mathrm{d}\sigma=\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{a^2-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

$$\text{Aria}=\iint_D\frac{a\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},$$

unde D este proiecția pe planul $x\mathrm{O}y$ a suprafeței decupată de cilindru în suprafața emisferei

$$\text{Aria}=a\int_0^a\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{ay-y^2}}^{\sqrt{ay-y^2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}=$$

$$=a\int_0^a\left[\arcsin\frac{x}{\sqrt{a^2-y^2}}\right]_{x=-\sqrt{ay-y^2}}^{x=\sqrt{ay-y^2}}\mathrm{d}x=$$

$$=2a\int_0^a\arcsin\sqrt{\frac{y}{a+y}}\,\mathrm{d}y=a^2(\pi-2).$$

5 Să se calculeze integrala de suprafață

$$I=\iint_S\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\sigma,$$

unde S este suprafața laterală a conului

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=0;\ 0\le z\le b,\ a>0.$$

Rezolvare. ***Observăm că***

$$z=\frac{b}{a}\sqrt{x^2+y^2},$$

$$\mathrm{d}\sigma=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{b^2}{a^2}\frac{y^2}{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{a}\sqrt{a^2+b^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$I=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\iint_D\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

unde D este proiecția pe planul xOy a suprafeței S, adică $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le a^2\}$.

$$I=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\rho^2\mathrm{d}\rho=\frac{2\pi a^2\sqrt{a^2+b^2}}{3}.$$

6 Să se calculeze

$$I=\iint_S\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+4z^2}}\mathrm{d}\sigma,$$

unde S este emisfera superioară $x^2+y^2+z^2=a^2$, $z\ge 0$, $a\ne 0$.

Rezolvare. O reprezentare parametrică a lui S este $x=a\sin\theta\cos\varphi$, $y=a\sin\theta\sin\rho$, $z=a\cos\theta$, cu $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $\varphi\in[0,2\pi]$. Avem

$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial\theta}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\theta}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)^2=a^2$$

$$G=\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2=a^2\sin^2\theta$$

$$F=\frac{\partial x}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial x}{\partial\varphi}+\frac{\partial y}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi}+\frac{\partial z}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial z}{\partial\varphi}=0,$$

deci $\mathrm{d}\sigma=a^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$

$$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a^2\sin\theta}{\sqrt{a^2+3a^2\cos^2\theta}}\mathrm{d}\theta=-2\pi a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}(\cos\theta)}{\sqrt{1+3\cos^2\theta}}=$$

$$=\frac{-2\pi a}{\sqrt{3}}\ln\left(\sqrt{3}\cos\theta+\sqrt{1+3\cos^2\theta}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2\pi a}{3}\ln\left(2+\sqrt{3}\right).$$

7 Să se calculeze integrala de suprafață

$$I=\iint_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

unde S este fața exterioară a sferei

$$x^2+y^2+z^2=R^2,\ R>0.$$

Rezolvare. Versorul normală $\overline{n}$ al feței exterioare a sferei este $\overline{n}=\left(\frac{x}{R},\frac{y}{R},\frac{z}{R}\right)$

$$I=\iint_S\left(\frac{x^2}{R}+\frac{y^2}{R}+\frac{z^2}{R}\right)\mathrm{d}\sigma=\iint_S\frac{R^2}{R}\mathrm{d}\sigma=R\iint_S\mathrm{d}\sigma=R\cdot 4\pi R^2=4\pi R^3.$$

8 Să se calculeze

$$I=\iint_S xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}x\mathrm{d}z,$$

unde S este fața exterioară a suprafeței

$$S=\left\{(x,y,z)\middle|x^2+y^2+z^2=a^2,\, z\geq\sqrt{x^2+y^2},\, a>0\right\}.$$

Rezolvare. O parametrizare a suprafeței S este

$x=a\sin\theta\cos\varphi;\ y=a\sin\theta\sin\varphi;\ z=a\cos\theta,\ \theta\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right],\ \varphi\in[0,2\pi].$

Deducem

$$A=a^2\cos\varphi\sin^2\theta,\ B=a^2\sin\varphi\sin^2\theta,\ C=a^2\sin\theta\cos\theta,$$

$$\sqrt{A^2+B^2+C^2}=a^2\sin\theta.$$

Atunci $\overline{n}$ are coordonatele

$$(\cos\varphi\sin\theta,\sin\varphi\sin\theta,\cos\theta).$$

Rezultă:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}a^4\left(\cos^2\varphi\sin\varphi\sin^4\theta+\sin^2\varphi\sin^3\theta\cos\theta+\cos\varphi\cos^2\theta\sin^2\theta\right)\mathrm{d}\varphi=\frac{\pi a^4}{16}.$$

9 Să se afle coordonatele centrului de greutate a emisferei superioare $x^2+y^2+z^2=R^2,\ R>0$.

Rezolvare. Ecuația emisferei superioare S este

$$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2},\ D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\leq R^2\right\}.$$

Observăm că

$$\mathrm{d}\sigma=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ \text{iar}\ S=\iint_S\mathrm{d}\sigma=2\pi R^2$$

$$S_x=\iint\limits_S x\mathrm{d}\sigma=R\iint\limits_D \frac{x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=R\int\limits_0^R \rho^2\left(R^2-\rho^2\right)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}\rho\cdot\int\limits_0^{2\pi}\cos\theta\mathrm{d}\theta=0$$

$$S_y=\iint\limits_S y\mathrm{d}\sigma=R\iint\limits_D \frac{y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=R\int\limits_0^R \rho^2\left(R^2-\rho^2\right)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}\rho\cdot\int\limits_0^{2\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta=0$$

$$S_z=\iint\limits_S z\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$

$$=R\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=R\int\limits_0^R \rho^2\mathrm{d}\rho\cdot\int\limits_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta=\pi R^3.$$

Coordonatele centrului de greutate sunt

$$x_{\mathrm{G}}=\frac{S_x}{S}=0;\ y_{\mathrm{G}}=\frac{S_y}{S}=0;\ z_{\mathrm{G}}=\frac{S_z}{S}=\frac{R}{2}.$$

10 Să se calculeze fluxul câmpului vectorial $\overline{F}$ prin fața exterioară a suprafeței semisferei S unde

$$\overline{F}(x,y,z)=(x,y,z)$$

$$S=\left\{(x,y,z)\middle|x^2+y^2+z^2=R^2,\ z\geq 0\right\},\ R>0.$$

Rezolvare. ***Avem***

$$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2},\ (x,y)\in D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\leq R^2\right\},$$

$$\overline{n}=\left(\frac{x}{R},\frac{y}{R},\frac{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}{R}\right)$$

$$\Phi_s(F)=\iint\limits_S \overline{F}\cdot\overline{n}\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_S\left(x\cdot\frac{x}{R}+y\frac{y}{R}+z\cdot\frac{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}{R}\right)\mathrm{d}\sigma=$$

$$=\frac{1}{R}\iint\limits_S\left(x^2+y^2+R^2-x^2-y^2\right)\mathrm{d}\sigma=R\iint\limits_S\mathrm{d}\sigma=R\cdot 2\pi R^2=2\pi R^3.$$

11 Să se calculeze aria suprafeței $z=\sqrt{x^2+y^2}$ situată în interiorul cilindrului $x^2+y^2=2x$.

Rezolvare.

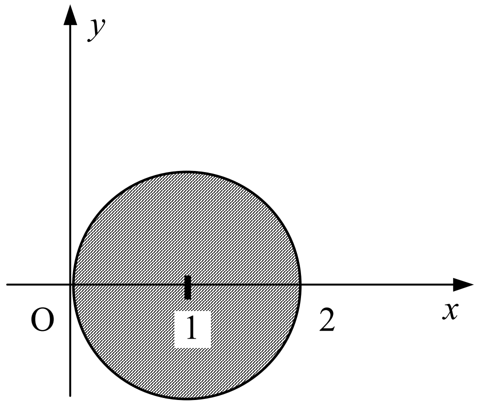


Fig. 8.1

Aria suprafeței considerate va fi

$$S=\iint_S \mathrm{d}\sigma=\iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

unde $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 2x\right\}$ şi este proiecția lui S în planul xOy.

$$S=\iint_D \sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{2}\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$

$$=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\cos\theta}\rho\mathrm{d}\rho=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}2\cos^2\theta\mathrm{d}\theta=\pi\sqrt{2}.$$

12 Să se calculeze aria suprafeței sferei $x^2+y^2+z^2=a^2$ situată în exteriorul cilindrului $x^2+y^2=\pm ax$ (Viviani).

Rezolvare. Cei doi cilindri decupează în sferă patru ferestre de arie egală. Pentru a afla aria suprafeței sferei situată în exteriorul cilindrilor vom calcula aria situată în interiorul celor patru

ferestre:

$$A_f = \iint_S d\sigma = \iint_{x^2+y^2 \le ax} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\right)\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\right)\right)^2}\, dxdy =$$

$$= \iint_{x^2+y^2 \le ax} \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{a^2 - x^2 - y^2}}\, dxdy.$$

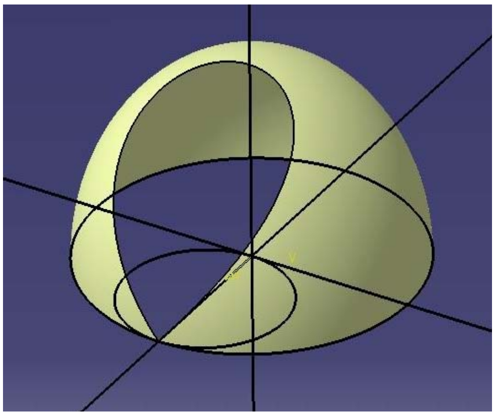


Fig. 8.2

Trecând la coordonatele polare, integrala devine:

$$A_f = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a\cos\theta} \sqrt{\frac{a^2}{a^2 - \rho^2}}\, \rho d\rho d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\left(a - a\sin\theta\right) d\theta = \pi a^2 - 2a^2.$$

Aria din suprafața sferei aflată în interiorul cilindrului este prin urmare $4\pi a^2 - 8a^2$.

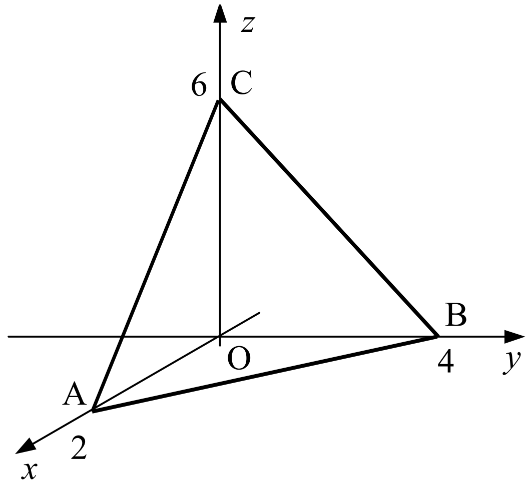
Aria totală a sferei este $S = 4\pi a^2$. Deci, aria suprafeței din sferă aflată în afara ferestrelor Viviani va fi

$$A = 4\pi a^2 - \left(4\pi a^2 - 8a^2\right) = 8a^2.$$

13 Calculați aria porțiunii din planul $6x + 3y + 2z = 12$ conținută în planul octant.

Rezolvare. Aria suprafeței ABC va fi

$$A = \iint_{\text{ABC}} d\sigma = \iint_{\text{OAB}} \sqrt{1 + (-3)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2}\, dxdy = \iint_{\text{OAB}} \sqrt{\frac{49}{4}}\, dxdy = \frac{7}{2} \iint_{\text{OAB}} dxdy = 14.$$



14 Să se calculeze aria suprafeței $z=\dfrac{x^2}{2a}+\dfrac{y^2}{2b}$ situată în interiorul cilindrului $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le c^2$, $a,b,c\in\mathbb{R}_+^*$.

Rezolvare. Suprafața decupată din paraboloidul $z=\dfrac{x^2}{2a}+\dfrac{y^2}{2b}$ de cilindrul $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le c^2$ se proiectează în planul $x\mathrm{O}y$ în elipsa $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le c^2$. Atunci, deoarece $p=\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{x}{a}$ $q=\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{y}{b}$, aria se calculează cu

$$A=\iint_S \mathrm{d}\sigma=\iint_{\mathrm{pr}\,x\mathrm{O}y}\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,.$$

Trecând în planul $x\mathrm{O}y$ la coordonate polare generalizate $\begin{cases} x=ac\rho\cos\theta;\\ y=ac\rho\sin\theta.\end{cases}$

Jacobianul transformării va fi egal cu $abc^2\rho$ şi deci integrala va deveni

$$A=\int_0^1\int_0^{2\pi}\sqrt{1+c^2\rho^2}\,abc^2\rho\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\rho=\frac{2\pi ab}{3}\left[\left(\sqrt{1+c^2}\right)^3-1\right].$$

15 Să se calculeze $\iint_S (x+y+z)\,\mathrm{d}\sigma$ dacă S este suprafața

$$x^2+y^2+z^2=a^2 \text{ cu } z\ge 0\,.$$

Rezolvare. Considerăm parametrizarea suprafeței S dată de

$$x = a\sin\theta\cos\varphi,\ y = a\sin\theta\sin\varphi,\ z = a\cos\theta,\ \theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\ \varphi\in[0,2\pi].$$

Atunci:

$$A = \frac{D(y,z)}{D(\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} a\cos\theta\sin\varphi & a\sin\theta\cos\varphi \\ -a\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = a^2\sin^2\theta\cos\varphi$$

$$B = \frac{D(z,x)}{D(\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} -a\sin\theta & 0 \\ a\cos\theta\cos\varphi & -a\sin\theta\sin\varphi \end{vmatrix} = a^2\sin^2\theta\sin\varphi$$

$$C = \frac{D(x,y)}{D(\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} a\cos\theta\cos\varphi & -a\sin\theta\sin\varphi \\ a\cos\theta\sin\varphi & a\sin\theta\cos\varphi \end{vmatrix} = a^2\sin^2\theta\cos\theta$$

şi

$$\sqrt{A^2+B^2+C^2} = \sqrt{a^4\sin^4\theta + a^4\sin^2\theta\cos^2\theta} = a^2\sin\theta.$$

În aceste condiții:

$$\iint_S (x+y+z)\mathrm{d}\sigma = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}(a\cos\theta\cos\varphi + a\sin\theta\sin\varphi + a\cos\theta)\cdot a^2\sin\theta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta =$$

$$= 2a^3\pi\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta = a^3\pi.$$

16 Să se calculeze integrala

$$\iint_S (y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (z-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dacă S este fața exterioară a conului $x^2+y^2=z^2\ (0\le z\le h)$.

Rezolvare. Deoarece suprafața S este exprimată explicit prin relația $z=\sqrt{x^2+y^2}$, deducem imediat că $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ şi deci normala la suprafață va fi dată de formula

$$\overline{n}_{\mathrm{e}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\overline{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\overline{j} - \overline{k}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\overline{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\overline{j} - \overline{k}\right)$$

$$\iint\limits_S (y-z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z-x)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x-y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$

$$=\iint\limits_{\Pr(S;xOy)}\left[\left(y-\sqrt{x^2+y^2}\right)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\left(\sqrt{x^2+y^2}-x\right)\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}-x+y\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}(2y-2x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Trecând la coordonate polare

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta; \\ y=\rho\sin\theta, \end{cases}\quad \rho\in(0,1];\ \theta\in[0,2\pi),$$

integrala devine

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 2\rho(\sin\theta-\cos\theta)\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}(\sin\theta-\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta=0\,.$$

17 Să se calculeze integrala

$$\iint\limits_S \frac{1}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}z+\frac{1}{y}\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\frac{1}{z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,,$$

dacă S este fața exterioară a elipsoidului

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ a,b,c\in\mathbb{R}_+^*.$$

Rezolvare. Pentru suprafața S considerăm parametrizarea

$$\begin{cases} x=a\sin\theta\cos\varphi, \\ y=b\sin\theta\sin\varphi, \\ z=c\cos\theta, \end{cases}\quad \begin{array}{l}\theta\in[0,\pi]; \\ \varphi\in[0,2\pi].\end{array}$$

Atunci

$$A=\frac{D(y,z)}{D(\theta,\varphi)}=\begin{vmatrix} b\cos\theta\sin\varphi & b\sin\theta\cos\varphi \\ -c\sin\theta & 0 \end{vmatrix}=bc\sin^2\theta\cos\varphi$$

$$B=\frac{D(z,x)}{D(\theta,\varphi)}=\begin{vmatrix} -c\sin\theta & 0 \\ a\cos\theta\cos\varphi & -a\sin\theta\sin\varphi \end{vmatrix}=ac\sin^2\theta\sin\varphi$$

$$C=\frac{D(x,y)}{D(\theta,\varphi)}=\begin{vmatrix} a\cos\theta\cos\varphi & -a\sin\theta\sin\varphi \\ b\cos\theta\sin\varphi & b\sin\theta\cos\varphi \end{vmatrix}=ab\sin\theta\cos\theta$$

şi

$$\iint_S \frac{1}{x}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\frac{1}{y}\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\frac{1}{z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{A}{x}+\frac{B}{y}+\frac{C}{z}\right)\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta=$$

$$=\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{bc\sin^2\theta\cos\varphi}{a\sin\theta\cos\varphi}+\frac{ac\sin^2\theta\sin\varphi}{b\sin\theta\sin\varphi}+\frac{ab\sin\theta\cos\theta}{c\cos\theta}\right)\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta=$$

$$=\frac{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}{abc}\int_0^{\pi}\left(\int_0^{2\pi}\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\right)=$$

$$=4\pi\frac{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}{abc}.$$

`

18 Să se calculeze masa pânzei parabolice $z=\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)$ $\left(0\le z\le 1\right)$ a cărei densitate variază după legea $\rho=z$.

Rezolvare. Masa pânzei parabolice se calculează după formula

$$M=\iint_S \rho\mathrm{d}\sigma=\iint_{x^2+y^2\le 2}\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)\cdot\sqrt{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

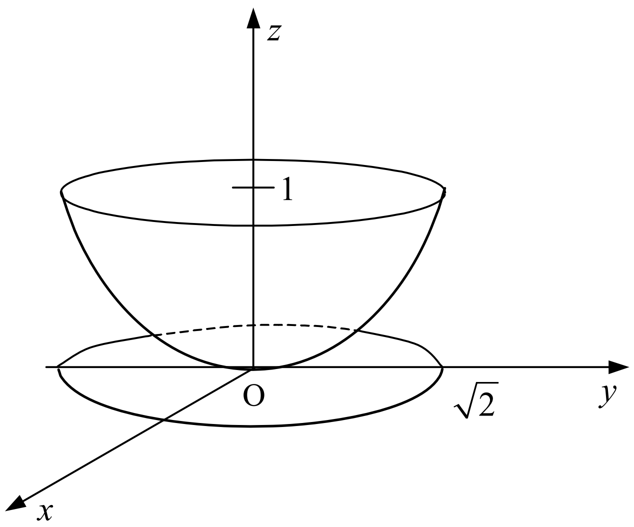


Fig. 8.4

Trecând la coordonate polare în planul $x\mathrm{O}y$, integrala devine:

$$M=\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}}\frac{1}{2}\rho^3\sqrt{1+\rho^2}\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=\frac{2\pi}{15}\left[1+6\sqrt{3}\right].$$

19 Să se calculeze aria globului terestru (presupunem că globul pământesc este o sferă cu raza $R\approx 6400$ km) cuprinsă între meridianele $\varphi=30^\circ$, $\varphi=60^\circ$ şi paralelele $\theta=45^\circ$ şi $\theta=60^\circ$.

Rezolvare.

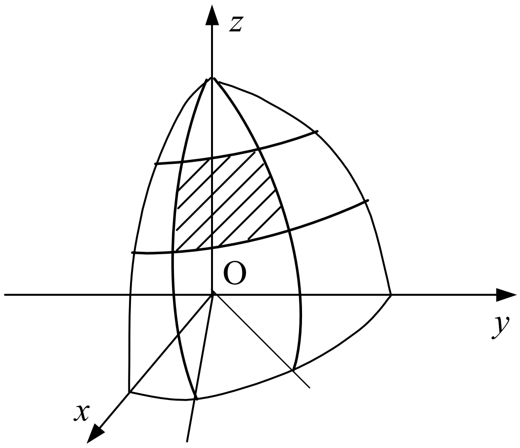


Fig. 8.5

Aria căutată se calculează cu formula $A = \iint\limits_S \mathrm{d}\sigma$. Trecând la coordonate polare $x = R\sin\theta\cos\varphi$, $y = R\sin\theta\sin\varphi$, $z = R\cos\theta$, deoarece Jacobianul transformării este $R^2 \sin\theta$ integrala devine

$$\int_{\pi/4}^{\pi/3}\left(\int_{\pi/6}^{\pi/3} R^2 \sin\theta \,\mathrm{d}\varphi\right)\mathrm{d}\theta = R^2 \cdot \frac{\pi}{6} \cdot \frac{\sqrt{2}-1}{2} = \frac{R^2\pi}{12}\left(\sqrt{2}-1\right);$$

$$A = 4{,}6 \cdot 10^6 \text{ km}^2.$$

20 Să se calculeze suprafața totală a corpului limitat de sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$ şi de paraboloidul $x^2 + y^2 = 2az$ $(a > 0)$.

Rezolvare.

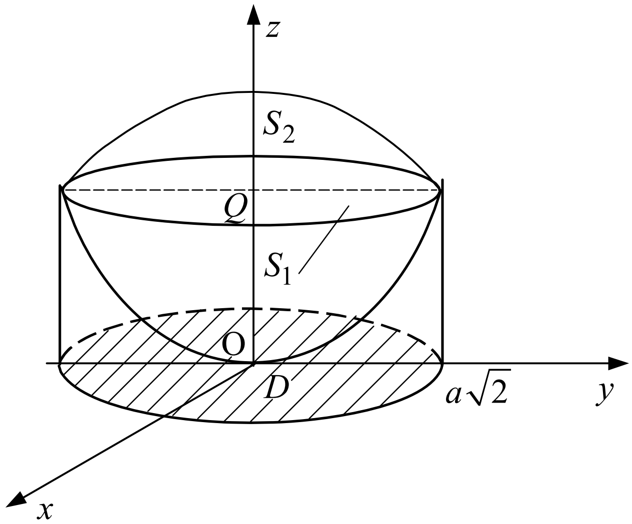


Fig. 8.6

Cele două suprafețe se intersectează după curba $z=a,\ x^2+y^2=2a^2$ $S=S_1\cup S_2$, unde

$$A_1=\iint_{S_1}\mathrm{d}\sigma=\iint_D\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$

$$=\frac{1}{a}\int_0^{2\pi}\int_0^{a\sqrt{2}}\sqrt{a^2+\rho^2}\,\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=2\pi a^2\left(3\sqrt{3}-1\right)$$

$$A_2=\iint_{S_2}\mathrm{d}\sigma=\iint_D\sqrt{1+\frac{x^2}{3a^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{3a^2-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{a\sqrt{2}}\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{3a^2-\rho^2}}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=2\pi a^2\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-1\right).$$

Suprafața totală va fi deci $A_1+A_2=4\pi a^2\left(1+\sqrt{3}\right)$.

21 Să se afle aria porțiunii de suprafață, exprimată sub formă explicită, secționată:

(i) de cilindrul $x^2+y^2=R^2,\ R>0\ \left(x,y>0\right)$ din paraboloidul hiperbolic $z=xy$;

(ii) de cilindrul $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=c^2,\ c>0$, din paraboloidul eliptic $z=\dfrac{x^2}{2a}+\dfrac{y^2}{2b};\ a,b>0$;

(iii) de cilindrul $\left(x^2+z^2\right)^2=2a^2xz,\ a>0$, din paraboloidul hiperbolic $xz=ay$.

Rezolvare.

(i) Cum suprafața este exprimată sub formă explicită este comod să folosim formule:

$$A_1=\iint_S\mathrm{d}\sigma=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

unde D este proiecția suprafeței S pe planul xOy.

În acest caz $D_{xy}=\left\{\left(x,y\right)\in\mathbb{R}_+^2\,\middle|\,x^2+y^2\le R^2\right\}$ și

$$A_1 = \iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Trecând la coordonate polare, găsim:

$$A = \int_0^{\pi/2}\left(\int_0^R r\sqrt{1+r^2}\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{6}\left[\left(r+R^2\right)^{3/2}-1\right].$$

(ii) Procedând similar ca la punctul (i), deducem:

$$A_2 = \iint\limits_S \mathrm{d}\sigma = \iint\limits_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

unde:

$$D_{xy} = \left\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le c^2\right\}.$$

Prin urmare,

$$A_2 = \iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Folosind coordonatele polare generalizate obținem:

$$A = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^R \sqrt{1+r^2}\cdot a\cdot b\cdot r\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\theta = \frac{2}{3}\pi\cdot a\cdot b\left[\left(1+c^2\right)^{3/2}-1\right].$$

(iii) Schimbând rolul lui y cu z şi procedând similar ca la punctele precedente; obținem:

$$A = \iint\limits_S \mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{D_{xz}} \sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z = \iint\limits_{D_{xz}} \sqrt{1+\left(\frac{z}{a}\right)^2+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z,$$

unde:

$$D_{xz} = \left\{(x,z)\in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \left(x^2+z^2\right)^2 \le 2a^2xz\right\}.$$

Folosim coordonatele polare.

$$T:\begin{cases} x = r\cos\theta; \\ y = r\sin\theta, \end{cases} \quad 0\le r\le a\sqrt{\sin 2\theta},\ \theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],$$

iar imaginea domeniului D_{xz} prin transformarea T este:

$$T(D_{xz}) = \left\{(r,\theta) \,\middle|\, 0\le r\le a\sqrt{\sin 2\theta},\ \theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right\}.$$

Prin urmare,

$$A=\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{a\sqrt{\sin 2\theta}}\frac{1}{a}\sqrt{a^2+r^2}\cdot r\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\theta=\frac{2}{3}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[(1+\sin 2\theta)^{3/2}-1\right]\mathrm{d}\theta.$$

Efectuând şi schimbarea de variabilă $\theta=\frac{\pi}{4}+\lambda$, obținem

$$A=\frac{2}{3}a^2\left(\frac{10}{3}-\frac{\pi}{2}\right).$$

22 Să se afle aria porțiunii de suprafață, exprimată sub formă implicită, secționată:

(i) de cilindrul $x^2+y^2=Rx,\ R>0$, din sfera $x^2+y^2+z^2=R^2$, (suprafața Viviani);

(ii) de cilindrul $x^2+y^2=R^2,\ R>0$, din conul $y^2+z^2=x^2$;

(iii) de conul $z^2=ax^2+by^2,\ a,b>0$ din sfera:

$$x^2+y^2+z^2=2Rz,\ R>0.$$

Rezolvare.

(i) Metoda recomandată în astfel de cazuri este de a obține o reprezentare parametrică a suprafeței pentru care calculăm aria.

Vom folosi coordonatele sferice:

$$T\begin{cases} x=r\cos\theta\sin\varphi, & r=R,\\ y=r\sin\theta\sin\varphi, & \varphi\in[0,\pi],\\ z=r\cos\varphi, & \theta\in[0,2\pi]. \end{cases}$$

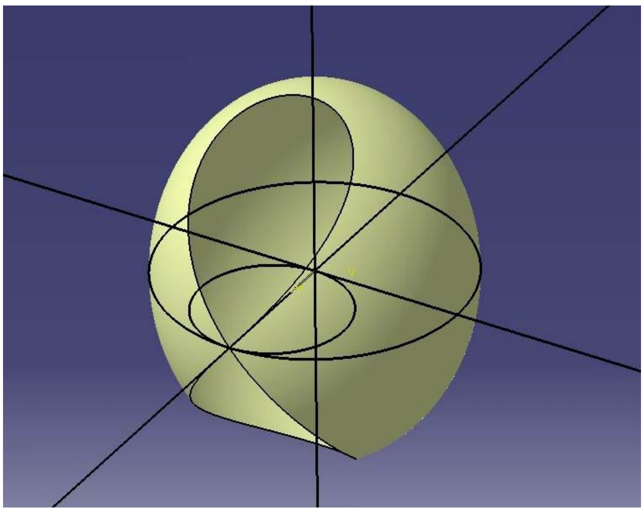


Fig. 8.7

Cu ajutorul matricei derivatelor

$$M=\begin{pmatrix} R\cos\varphi\cos\theta & R\cos\varphi\sin\theta & -R\sin\varphi \\ -R\sin\varphi\sin\theta & R\sin\varphi\cos\theta & 0 \end{pmatrix}$$

se determina coeficienţii formei Gauss ai sferei

$$E=R^2,\ F=0,\ G=R^2\sin^2\varphi$$

şi

$$A=\iint\limits_S \mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D_{\varphi\theta}}\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta=\iint\limits_{D_{\varphi\theta}}R^2\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta,$$

unde pentru $D_{\varphi\theta}$ vom face următoarele consideraţii.

Vom studia numai porţiunea din suprafaţă situată în primul cadran. Pentru punctele de pe curba Viviani curba de intersecţie dintre sferă şi cilindru) vom avea

$$\sin\varphi=\cos\theta \text{ şi cum } 0\le\theta\le\frac{\pi}{2} \text{ iar } 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}\Rightarrow\varphi+\theta=\frac{\pi}{2}.$$

În consecinţă:

$$D_{\varphi\theta}=\left\{(\varphi,\theta)\in\mathbb{R}\ \middle|\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}-\theta,\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right\},$$

iar

$$A=4R^2\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{\pi/2-\theta}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\right)\mathrm{d}\theta=4R^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right).$$

Obs. Aria părţii de emisferă care rămâne după decuparea suprafeţei Viviani este $4R^2$, fapt ce arată că valoarea ei nu se exprimă prin intermediul numerelor iraţionale.

(ii) O altă metodă folosită este cea în care se explicitează ecuaţia suprafeţei. În acest caz vom calcula numai partea superioară $(z>0)$ a suprafeţei.

$$z=+\sqrt{x^2+y^2}$$

şi

$$A=2\iint\limits_S\mathrm{d}\sigma=2\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=8\sqrt{2}\iint\limits_{D_{xy}}\frac{x\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2-y^2}},$$

unde

$$D_{xy}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ \middle|\ y\le x\le\sqrt{R^2-y^2},0\le y\le\frac{R}{\sqrt{2}}\right\}.$$

Folosind teorema lui Fubini se obţine:

$$A = 8\sqrt{2}\int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}}\left(\int_y^{\sqrt{R^2-y^2}} \frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = 2\pi R^2.$$

(iii) Folosim coordonatele sferice

$$T:\begin{cases} x = R\cos\theta\sin\varphi \\ y = R\sin\theta\sin\varphi, \\ z = R\cos\varphi + R \end{cases} \quad \begin{matrix}\varphi\in[0,\pi] \\ \theta\in[0,2\pi]\end{matrix}$$

şi $A = \iint\limits_S \mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{D_{\varphi\theta}} \sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta = \iint\limits_{D_{\varphi\theta}} R^2\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$, unde domeniul $D_{\varphi\theta}$ este domeniul plan mărginit de curba

$$\operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2} = a\cos^2\theta + b\sin^2\theta,\ \theta\in[0,2\pi].$$

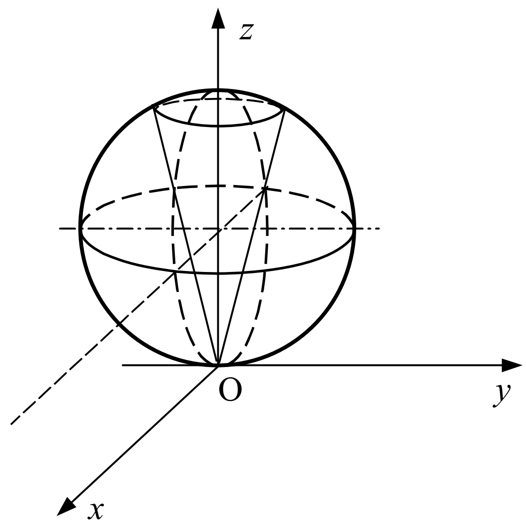


Fig. 8.8

Prin urmare:

$$A = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\operatorname{arctg}\sqrt{a\cos^2+b\sin^2\theta}} R^2\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\right)\mathrm{d}\theta =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} 2R^2\frac{\mathrm{d}\theta}{(a+1)\cos^2\theta+(b+1)\sin^2\theta} = \frac{4\pi R^2}{\sqrt{(a+1)(b+1)}}.$$

23 Să se calculeze aria suprafeţelor exprimată sub formă parametrică:
(i) torul eliptic:

$$\begin{cases} x=(r+R\cos\varphi)\cos\theta, \\ y=(r+R\cos\varphi)\sin\theta, \\ z=R\sin\varphi, \end{cases} \quad \begin{matrix} \varphi\in[0,2\pi], \\ \theta\in[0,2\pi], \end{matrix} \quad 0<r<R.$$

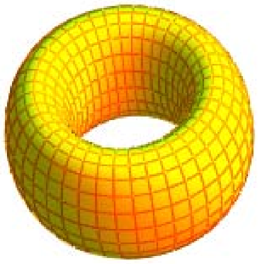


Fig. 8.9

(ii) suprafața lui Dini:

$$\begin{cases} x=\cos u\sin v, \\ y=\sin u\sin v, \\ z=\cos v+\ln \operatorname{tg}\dfrac{v}{2}+u, \end{cases} \quad \begin{matrix} u\in[0,2\pi], \\ v\in\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}\right]. \end{matrix}$$

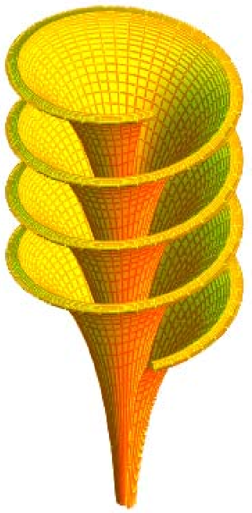


Fig. 8.10

(iii) suprafața „opt”:

$$\begin{cases} x=\cos u\sin 2v \\ y=\sin u\sin 2v, \\ z=\sin v \end{cases} \quad \begin{matrix} u\in[0,2\pi], \\ v\in\left[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right]. \end{matrix}$$

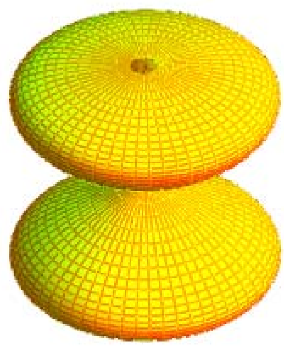


Fig. 8.11

Rezolvare.

(i)

$$A=\iint_{S}\mathrm{d}\sigma=\iint_{D_{\varphi\theta}}\left\|\overline{r}_{\theta}\times\overline{r}_{\varphi}\right\|\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi,$$

unde

$$D_{\varphi,\theta}=\left\{(\varphi,\theta)\in\mathbb{R}^{2}\,\middle|\,(\varphi,\theta)\in[0,2\pi]^{2}\right\}$$

şi

$$\begin{cases}\overline{r}_{\varphi}=-R\sin\varphi\cos\theta\cdot\overline{i}-R\sin\varphi\sin\theta\cdot\overline{j}+R\cos\varphi\cdot\overline{k};\\ \overline{r}_{\theta}=-(r+R\cos\varphi)\sin\theta\cdot\overline{i}+(r+R\cos\varphi)\cos\theta\cdot\overline{j}.\end{cases}$$

Deducem:

$$\left\|\overline{r}_{\theta}\times\overline{r}_{\varphi}\right\|=R\cdot(r+R\cdot\cos\varphi),$$

de unde:

$$A=\int_{0}^{2\pi}\left(\int_{0}^{2\pi}R(r+R\cos\varphi)\,\mathrm{d}\varphi\right)\mathrm{d}\theta=4\pi^{2}rR.$$

(ii) Matricea derivatelor

$$M=\begin{pmatrix}-\sin u\cdot\sin v & \cos u\cdot\sin v & 1\\ \cos u\cdot\cos v & \sin u\cdot\cos v & \cos v\cdot\operatorname{ctg}v\end{pmatrix},$$

de unde

$$E=1+\sin^{2}v,\ G=\operatorname{ctg}^{2}v\ \text{ şi }\ F=\cos v\cdot\operatorname{ctg}v,$$

iar

$$EG-F=2\cos^{2}v$$

$$A=\iint_{S}\mathrm{d}\sigma=\iint_{D_{uv}}\sqrt{EG-F^{2}}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=\int_{0}^{2\pi}\left(\int_{\pi/6}^{\pi/3}\sqrt{3}\cos v\,\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}u=\pi\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right),$$

unde

$$D_{uv} = \left\{ (u,v) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, u \in [0,2\pi], v \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right] \right\}.$$

(iii) Matricea derivatelor este:

$$M = \begin{pmatrix} -\sin u \cdot \sin 2v & \cos u \cdot \sin 2v & 0 \\ 2\cos u \cdot \cos 2v & 2\sin u \cdot \cos 2v & \cos v \end{pmatrix},$$

de unde:

$$E = \sin^2 2v,\ G = 4\cos^2 2v + \cos^2 v \text{ şi } F = 0,$$

iar

$$EG - F^2 = \sin^2 2v\left(4\cos^2 2v + \cos^2 v\right)$$

$$A = \iint_S \mathrm{d}\sigma = \iint_{D_{uv}} \sqrt{EG - F}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \int_0^{2\pi}\left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} |\sin 2v| \sqrt{4\cos^2 2v + \cos^2 v}\,\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}u =$$

$$= 2\pi\left[\frac{31}{256}\ln\left(17 + 8\sqrt{5}\right) + \frac{30 + 17\sqrt{5}}{32}\right] \cong 16057.$$

24 **(i)** Să se determine momentul de inerţie al suprafeţei paraboloidului conic $x^2 + y^2 = 2az,\ 0 < z < a$, în raport cu axa O$z$.

(ii) Pentru aceeaşi suprafaţă determinaţi coordonatele centrului de greutate.

Rezolvare.

(i) Cum suprafaţa este dată printr-o ecuaţie explicită deduc

$$I_z = \iint_S \left(x^2 + y^2\right)\mathrm{d}\sigma = \iint_{D_{xy}} \left(x^2 + y^2\right)\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

unde

$$D_{xy} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \le x^2 + y^2 \le 2a^2 \right\}.$$

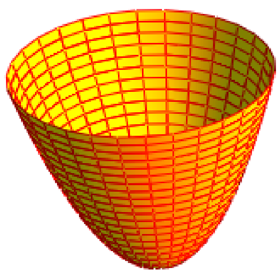


Fig. 8.12

Folosim transformarea în coordonate polare şi apoi teorema lui Fubini, deducem:

$$I_z = \frac{1}{a}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\sqrt{2a}} \rho^3\sqrt{a^2+\rho^2}\,\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\theta = \frac{4\pi}{15}\left(1+6\sqrt{3}\right)a^4 .$$

(ii) Datorită simetriei față de axa Oy deducem $x_G = y_G = 0$

$$S_z = \iint_S z\mathrm{d}S = \iint_{D_{xy}} \frac{1}{2a}\left(x^2+y^2\right)\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$= \frac{1}{2a}\cdot J_z = \frac{2\pi}{15}\left(1+6\sqrt{3}\right)a^3.$$

Cum aria suprafeței paraboloidului este $S = \iint_S \mathrm{d}\sigma = \frac{2\pi}{3}\left(3\sqrt{3}-1\right)a^2$

deducem că

$$z_G = \frac{S_z}{S} = \frac{55+9\sqrt{3}}{130}a .$$

25 Dacă proiecțiile vitezei unui fluid în punctul (x,y,z) la momentul t sunt funcțiile $u,v,w:\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$, atunci debitul de fluid care curge prin suprafața S este

$$Q = \iint_S \left(u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma\right)\mathrm{d}\sigma =$$

$$= \iint_S u\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + v\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + w\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y.$$

Să se calculeze debitul de fluid care curge prin fața superioară a jumătății superioare a elipsoidului

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{a^2}=1;\ a,b,c>0,$$

cunoscând că viteza fluidului este:

$$\overline{V} = x^3\cdot\overline{i} + yz\cdot\overline{j} .$$

Rezolvare.

Considerăm reprezentarea parametrică a suprafeței

$$S = \begin{cases} x = a\sin\varphi\cos\theta, \\ y = b\sin\varphi\sin\theta, \\ z = c\cos\varphi, \end{cases} \quad \begin{matrix} \varphi\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right] \\ \theta\in[0,2\pi] \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} A = bc\sin^2\varphi\cos\theta, \\ B = ac\sin^2\varphi\sin\theta. \end{cases}$$

Prin urmare:

$$Q=\iint\limits_{D_{\varphi\theta}}\left[x^3(\varphi,\theta)\cdot A(\varphi,\theta)+y(\varphi,\theta)\cdot z(\varphi,\theta)\cdot B(\varphi,\theta)\right]\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta=$$

$$=\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{2\pi}\left(a^3bc\sin^5\varphi\cos^4\theta+abc^2\sin^3\varphi\sin^2\theta\cos\varphi\right)\mathrm{d}\theta\right)\mathrm{d}\varphi=$$

$$=\int_0^{\pi/2}\left(a^3bc\cdot\frac{3\pi}{4}\sin^5\varphi+abc^2\pi\sin^3\varphi\cos\varphi\right)\mathrm{d}\varphi=$$

$$=\frac{6\pi}{15}a^3bc+\frac{\pi}{4}abc^2=\frac{\pi}{60}abc\left(24a^2+15c\right).$$

26 Dacă proiecțiile diferenței de presiune, pe axele de coordonate, în punctul (x,y,z) la momentul *t*, sunt funcțiile $p_x,p_y,p_z:\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$, atunci rezultanta presiunilor pe suprafața *S* este.

$$F=\iint\limits_S\overline{p}\cdot\overline{n}\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_S\left(p_x\cos\alpha+p_y\cos\beta+p_z\cos\gamma\right)\mathrm{d}\sigma=$$

$$=\iint\limits_S p_x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+p_y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+p_z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y.$$

Să se calculeze forța rezultantă pe fața exterioară a sferei:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+\left(z-c^2\right)=R^2,\ R>0;\ a,b,c\in\mathbb{R},$$

cunoscând că diferența de presiune este:

$$\overline{p}=x^2\cdot\overline{i}+y^2\cdot\overline{j}+z^2\cdot\overline{k}.$$

Rezolvare.

Expresia ce rămâne de calculat este:

$$F=\iint\limits_S x^2\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y.$$

Datorită simetriei relațiilor vom calcula numai integrala

$$I_3=\iint\limits_S z^2\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y.$$

Trecând în coordonate sferice:

$$S:\begin{cases} x = R\cos\varphi\sin\theta + a, & \varphi\in[0,2\pi],\\ y = R\sin\varphi\sin\theta + b, & \theta\in[0,\pi],\\ z = R\cos\theta + c, \end{cases}$$

deducem:

$$I_3 = \iint\limits_{D_{\varphi\theta}} z(\varphi,\theta)\cdot C(\varphi,\theta)\,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta =$$

$$= \int_0^{\pi}\left(\int_0^{2\pi}(R\cos\theta + a)^2 R^2 \sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\varphi\right)\mathrm{d}\theta =$$

$$= 2\pi R^2\int_0^{\pi}(R\cos\theta + a)^2 \sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{8\pi}{3}R^3 a.$$

În concluzie:

$$F = \frac{8\pi}{3}R^3(a+b+c).$$

27 Dacă intensitatea câmpului termic este $Q = \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}^3$, atunci fluxul termic prin suprafața S este:

$$\Phi = \iint\limits_S \overline{Q}\cdot\overline{n}\,\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_S \left(Q_x\cos\alpha + Q_y\cos\beta + Q_z\cos\gamma\right)\mathrm{d}\sigma =$$

$$= \iint\limits_S Q_x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + Q_y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + Q_z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y.$$

Să se calculeze fluxul termic prin suprafața conică exterioară $x^2+y^2=2z,\ 0\le z\le 1$, cunoscând că intensitatea câmpului termic este:

$$\overline{Q} = x\cdot\overline{i} + y\cdot\overline{j} + z\cdot\overline{k}\,.$$

Rezolvare.

Cum normala la fața exterioară a conului este

$$\overline{n} = +\frac{x\cdot\overline{i} + y\cdot\overline{j} + \overline{k}}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$$

deducem că:

$$\Phi = \iint\limits_S \left(x\cdot\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma\right)\mathrm{d}\sigma =$$

$$= \iint\limits_{D_{xy}}\left(x^2+y^2-\frac{x^2+y^2}{2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\iint\limits_{D_{xy}}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

unde

$$D_{xy} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \le x^2 + y^2 \le 2\right\}.$$

Trecând în coordonate polare, deducem:

$$\Phi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\sqrt{2}} \rho^2 \mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\theta = \pi .$$

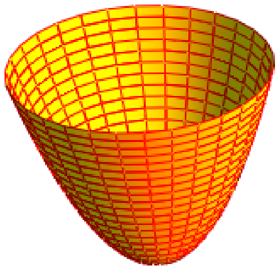


Fig. 8.13

28 Dacă intensitatea câmpului magnetic este $B:\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^3$, atunci fluxul magnetic prin suprafața S este:

$$\Phi = \iint_S \overline{B} \cdot \overline{n}\,\mathrm{d}\sigma = \iint_S \left(B_x \cos\alpha + B_y \cos\beta + B_z \cos\gamma\right)\mathrm{d}\sigma =$$

$$= \iint_S B_x \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + B_y \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + B_z \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.$$

Să se calculeze fluxul magnetic prin suprafața exterioară a sferei $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $R > 0$, cunoscând că intensitatea câmpului magnetic este:

$$\overline{B} = x \cdot \overline{i} + y \cdot \overline{j} + z \cdot \overline{k} .$$

Rezolvare.

Folosim coordonatele sferice

$$S:\begin{cases} x = R\cos\varphi\sin\theta, \\ y = R\sin\varphi\sin\theta, \quad (\theta,\varphi) \in D_{\theta\varphi} = \left\{(\theta,\varphi) \,\middle|\, \theta \in [0,\pi], \varphi \in [0,2\pi]\right\} \\ z = R\cos\theta, \end{cases}$$

şi atunci fluxul magnetic prin suprafața S este:

$$\Phi = \iint_{D_{\varphi\theta}} \left[x(\varphi,\theta)\cdot A(\varphi,\theta) + y(\varphi,\theta)\cdot B(\varphi,\theta) + z(\varphi,\theta)\cdot C(\varphi,\theta)\right]\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta .$$

Cum

$$\begin{cases} A(\varphi,\theta) = R^2 \cos\varphi \sin^2\theta \\ B(\varphi,\theta) = R^2 \sin\varphi \sin^2\theta \\ C(\varphi,\theta) = R^2 \sin\varphi \cos\theta \end{cases}$$

deducem

$$\Phi = \iint\limits_{D_{\varphi\theta}} \left(R^3 \cos^2\varphi \sin^3\theta + R^3 \sin^2\varphi \sin^3\theta + R^3 \sin\theta \cos^2\theta\right) \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\theta =$$

$$= R^3 \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} \sin\theta \mathrm{d}\theta\right) \mathrm{d}\varphi = 4\pi R^3.$$

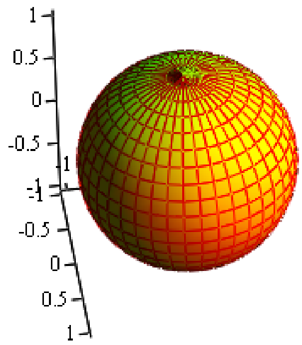


Fig. 8.14

29 Dacă intensitatea câmpului electric este $E: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^3$, atunci fluxul câmpului electric prin suprafața S este:

$$\Phi = \iint\limits_S \overline{E} \cdot \overline{n} \mathrm{d}\sigma = \iint\limits_S \left(E_x \cos\alpha + E_y \cos\beta + E_z \cos\gamma\right) \mathrm{d}\sigma =$$

$$= \iint\limits_S E_x \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + E_y \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + E_z \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.$$

Să se calculeze fluxul electric prin fața exterioară a jumătății superioare a elipsoidului:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1;\ a, b, c \in \mathbb{R}^*,$$

cunoscând că intensitatea câmpului electric este:

$$\overline{E} = yz \cdot \overline{j}.$$

Rezolvare. Avem de calculat integrala

$$\Phi = \iint\limits_S yz \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x.$$

Folosind coordonatele sferice generalizate

$$S:\begin{cases} x = a\cos\theta\sin\varphi, \\ y = b\sin\theta\sin\varphi, \quad (\theta,\varphi)\in D_{\theta\varphi} = \{(\theta,\varphi) | \theta\in[0,\pi], \varphi\in[0,2\pi]\} \\ z = c\cos\varphi \end{cases}$$

deducem:

$$I = \iint_{D_{\varphi\theta}} y(\theta,\varphi)\cdot z(\theta,\varphi)\cdot B(\theta,\varphi)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \iint_{D_{\varphi\theta}} bc\sin\theta\sin\varphi\cos\varphi\cdot ac\sin\theta\sin^2\varphi\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta =$$

$$= abc^2\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\sin^2\theta\sin^3\varphi\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\right) = \frac{\pi}{4}abc^2.$$

30 Fie $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ un domeniu şi $S=\partial\Omega$. Potenţialul newtonian al suprafeţei *S* în punctul $\mathrm{M}(x,y,z)$ (numit şi potenţialul stratului simplu) este prin definiţie

$$P_S(x,y,z) = \iint_S \frac{\rho}{r}\mathrm{d}\sigma,$$

unde $\rho=\rho(\xi,\eta,\varsigma)$ este densitatea punctual distribuită pe suprafaţa *S*, iar *r* este distanţa de la un punct arbitrar $\mathrm{N}(\xi,\eta,\varsigma)\in S$ la punctul M:

$$r = \mathrm{dist}(\mathrm{M},\mathrm{N}) = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\varsigma)^2}.$$

Forţa newtoniană de atracţie cu care punctul M de masă *m* este atras de suprafaţa *S* este:

$$\overline{F}_S(x,y,z) = k\cdot m\cdot\left(\frac{\partial P_s}{\partial x}\cdot\overline{i}+\frac{\partial P_s}{\partial j}\cdot\overline{j}+\frac{\partial P_s}{\partial z}\cdot\overline{k}\right) =$$

$$= k\cdot m\cdot\sum\left(\iint_S\frac{\partial\rho}{\partial\xi}\cdot\frac{1}{r}\mathrm{d}\sigma - \iint_S\rho\frac{\xi-x}{r^3}\mathrm{d}\sigma\right)\cdot\overline{i},$$

unde $k=6{,}67\cdot10^{-11}\mathrm{m}^3\cdot\mathrm{kg}^{-1}\cdot\mathrm{s}^{-2}$ este constanta de atracţie universală.

Să se determine:

(i) potenţialul suprafeţei conice omogene în vârful conului, suprafaţa conică fiind

$$z = \frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2},\ 0\le z\le h,\ R>0.$$

(ii) forța newtoniană de atracție cu care centrul bazei conului este atras de suprafața conică omogenă.

Rezolvare.

(i) distanța de la un punct arbitrar $\mathrm{N} \in S$ la vârful O al conului este

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} .$$

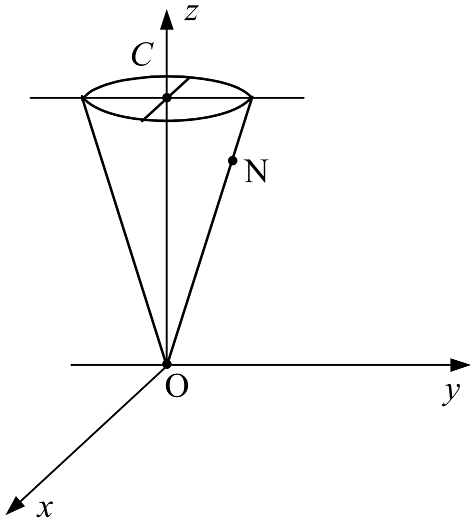


Fig. 8.15

Prin urmare, potențialul newtonian al suprafeței conice în vârful său O este

$$P_s(0,0,0) = \iint_S \frac{\rho}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \mathrm{d}\sigma = \rho \iint_{D_{xy}} \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + \frac{h^2}{R^2}\left(x^2 + y^2\right)}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y ,$$

unde:

$$D_{xy} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| x^2 + y^2 \leq R^2\right\}.$$

Efectuând calcule algebrice simple, se obține:

$$P_S(0,0,0) = \rho \cdot \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \right) \mathrm{d}r = 2\pi\rho R .$$

(ii) Din motive de simetrie $F_x = F_y = 0$, iar

$$F_{S_Z}(0,0,h) = -k\cdot m\cdot \iint_S \rho\cdot \frac{z-h}{\left[x^2+y^2+(z-h)^2\right]^{3/2}}\mathrm{d}\sigma =$$

$$= -k\cdot m\cdot \iint_{D_{xy}} \frac{z(x,y)-h}{\left[x^2+y^2+(z-h)^2\right]^{3/2}}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$= -k\cdot m\cdot\rho\cdot\frac{h}{R}\cdot\sqrt{1+\frac{h^2}{R^2}}\cdot\iint_{D_{xy}}\frac{\sqrt{x^2+y^2}-R}{\left[x^2+y^2+\left(\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}-h\right)^2\right]^{3/2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

unde:

$$D_{xy} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2+y^2\le R^2\right\}.$$

Folosind coordonatele polare şi teorema lui Fubini se obţine:

$$F_{S_Z}(0,0,h) = -2\pi km\rho\frac{h}{R^2}\sqrt{h^2+R^2}\int_0^R \frac{r(r-R)}{\left[r^2+\left(\frac{h}{R}r-h\right)^2\right]^{3/2}}\mathrm{d}r$$

şi notând cu $\ell=\sqrt{h^2+R^2}$, deducem:

$$F_{S_Z}(0,0,h) = -2\pi kmh\ell R\rho\int_0^R \frac{r(r-R)}{\left(\ell^2r^2-2Rh^2r+R^2h^2\right)^{3/2}}\mathrm{d}r\,.$$

Integrala se scrie ca sumă a trei integrale:

$$\frac{1}{\ell^2}\int_0^R\frac{\mathrm{d}r}{\left(\ell^2r^2-2Rh^2r+R^2h^2\right)^{3/2}}+\frac{R\left(h^2-R^2\right)}{\ell^4}\int_0^R\frac{\ell^2r-Rh^2}{\left(\ell^2r^2-2Rh^2r+R^2h^2\right)^{3/2}}\mathrm{d}r-$$

$$-\frac{2R^4h^2}{\ell^4}\int_0^R\frac{r^2\mathrm{d}r}{\left(\ell^2r^2-2Rh^2r+R^2h^2\right)^{3/2}}=\frac{1}{\ell^3}\ln\left(\frac{R}{h}\cdot\frac{\ell+R}{\ell-h}\right)+\frac{h^2-R^2}{Rh\ell^4}(R-h)-$$

$$-\frac{2}{\ell^2}(R+h).$$

Reunind toate rezultatele se obţine:

$$F_{S_Z}(0,0,h) = -\frac{2\pi kmhR}{\ell^2}\rho\ln\frac{R}{h}\cdot\frac{\ell+R}{\ell-h}+\frac{2\pi\rho mk(R+h)}{\ell}.$$

8.3 TEMĂ DE CONTROL

1. Suprafața

$$S=\left\{(x,y,z)\middle| z=\sqrt{x^2+y^2}\right\}-\{0,0,0\}$$

este orientabilă?

Răspuns. Da.

2. Să se calculeze aria suprafeței

$$S=\left\{(x,y,z)\ xy+z=0,\ x^2+y^2\le 0,\ x^2+y^2\le a^2\right\}.$$

Răspuns. $\frac{2\pi}{3}\left[\left(1+a^2\right)^{3/2}-1\right]$.

3. Să se calculeze integrala de suprafață

$$\iint_S \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}\sigma,$$

unde $S=\left\{(x,y,z)\middle| z=\sqrt{a^2-x^2-y^2},\ a>0\right\}$.

Răspuns. πa^3.

4. Să se calculeze integrala de suprafață

$$\iint_S \frac{z\,\mathrm{d}\sigma}{\sqrt{a^2+x^2+y^2}},$$

unde $S=\left\{(x,y,z)\middle|\ z=\frac{1}{2a}\left(x^2+y^2\right), 0\le z\le h\right\}$.

Răspuns. πh^2.

5. Să se calculeze

$$\iint_S \sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}\,\mathrm{d}\sigma,\ a,b,c\in \mathbb{R}_+^*,$$

unde $S=\left\{(x,y,z)\middle|\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0\right\}$.

Răspuns. $\frac{4\cdot\pi}{3}\cdot\frac{a^2\cdot b^2+b^2\cdot c^2+c^2\cdot a^2}{a\cdot b\cdot c}$.

6. Să se calculeze

$$\iint_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}z+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

unde S este fața exterioară a conului $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0,\ a,b,c\in\mathbb{R}_+^*,\ 0\le z\le b$.

Răspuns. $\frac{\pi a^2 b^2}{2}$.

7. Să se calculeze

$$\iint_S x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z+z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

unde S este fața exterioară a cilindrului

$$x^2+y^2=a^2,\ -h\le z\le h,\ a,h\in\mathbb{R}_+^*.$$

Răspuns. $3\pi a^2 h$.

8. Să se calculeze masa plăcii de grosime neglijabilă şi de densitate $\rho(x,y,z)=\sqrt{x^2+4}$ având forma dată de

$$S=\left\{(x,y,z)\middle|x^2-4z=0,\ x^2+y^2-2x\le 0\right\}.$$

Răspuns. $\frac{21\pi}{8}$.

9. Să se afle momentele de inerție, în raport cu axele de coordonate pentru placa de densitate $\rho(x,y,z)=y+z$, având forma dată de

$$S=\left\{(x,y,z)\middle|\ z=1-2x-y,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0\right\}.$$

Răspuns. $I_{Ox}=\frac{\sqrt{6}}{15},\ I_{Oy}=I_{Oz}=\frac{3\sqrt{6}}{80}$.

10. Să se calculeze fluxul câmpului vectorial $F(x,y,z)=(yz,zx,xy)$ prin fața exterioară a suprafeței care delimitează domeniul

$$\left\{(x,y,z)\middle|\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1,\ x\le y,\ a,b,c>0\right\}.$$

Răspuns. ***0.***

11. Să se calculeze $\iint\limits_S \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\sigma$ dacă S este suprafața exterioară a conului

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=0\ \left(0\le z\le b,\ a,b>0\right).$$

Răspuns. $\dfrac{2\pi a^2\sqrt{a^2+b^2}}{3}$.

12. Să se calculeze $\iint\limits_S (xy+yz+zx)\,\mathrm{d}\sigma$ dacă S este porțiunea suprafeței conului $z=\sqrt{x^2+y^2}$ decupată de suprafața $x^2+y^2=2ax,\ a>0$.

Răspuns. $\dfrac{64\sqrt{2}}{15}a^4$.

13. Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al suprafeței omogene $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2},\ x\ge 0;\ y\ge 0;\ x+y\le a,\ a>0$.

Răspuns. $x_G=y_G=\dfrac{a}{2\sqrt{2}}$.

14. Să se calculeze $\iint\limits_S |xyz|\,\mathrm{d}\sigma$ dacă S este partea suprafeței $z=x^2+y^2$ situată sub planul $z=1$.

Răspuns. $\dfrac{125\sqrt{5}-1}{420}$

15. Să se calculeze integrala $\iint\limits_S xyz\,\mathrm{d}\sigma$ dacă S este porțiunea din planul $x+y+z=1$ aflată în planul octant.

Răspuns. $\dfrac{\sqrt{3}}{120}$.

16. Să se calculeze integrala $\iint\limits_S z^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ dacă S este suprafața exterioară a elipsoidului $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ a,b,c>0$.

Răspuns. 0.

17. Să se calculeze integrala $\iint\limits_S y^2 z\mathrm{d}x\mathrm{d}y + xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z + x^2 y\mathrm{d}x\mathrm{d}z$ dacă S suprafața din primul octant constituită din $z=x^2+y^2;\ x^2+y^2=1$ şi planele de coordonate.

Răspuns. $\frac{\pi}{8}$.

18. Să se calculeze $\iint\limits_S xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y + xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z + yz\mathrm{d}x\mathrm{d}z$ dacă S este suprafața exterioară a piramidei limitată de planele $x=0; y=0; z=0$ şi $x+y+z=1$.

Răspuns. $1/8$.

19. Să se calculeze $\iint\limits_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}z + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ dacă S este suprafața exterioară a sferei

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2,\ a,b,c,R>0.$$

Răspuns. $\frac{8\pi}{3}(a+b+c)R^3$.

20. Să se calculeze $\iint\limits_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}x\mathrm{d}z + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ dacă S este suprafața exterioară a sferei $x^2+y^2+z^2=a^2,\ a>0$.

Răspuns. $4\pi a^3$.

21. Determinați aria suprafeței unui corp format prin intersecția celor doi cilindri

$$x^2+y^2=a^2,\ y^2+z^2=a^2,\ a>0.$$

Răspuns. $16a^2$.

22. Determinați aria hiperboloidului cu o pânză care are următoarea reprezentare parametrică

$$\begin{cases} x = \operatorname{ch} v \cos u, & u \in \left[\dfrac{\pi}{2}, 2\pi\right]; \\ y = \operatorname{ch} v \sin u, & \\ z = sh\, v & v \in [-2, 2]. \end{cases}$$

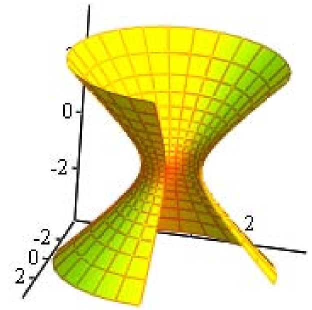


Fig. 8.16

Indicație. Coeficienții primei forme diferențiale a suprafeței sunt

$$A = \cos u \operatorname{ch}^2 v,\ B = \sin u \operatorname{ch}^2 v,\ C = -\operatorname{sh} v \operatorname{ch} v$$

$$\text{Aria} = \int_{\pi/2}^{2\pi} \left(\int_{-2}^{2} \operatorname{ch} v \cdot \sqrt{1 + 2\operatorname{sh}^2 v}\, \mathrm{d}v \right) \mathrm{d}u =$$

$$= \frac{3\pi}{2}\left[\operatorname{sh} 2 \cdot \sqrt{\operatorname{ch}^2 2 + \operatorname{sh}^2 2} - \sqrt{2} \cdot \ln\left(\sqrt{\operatorname{ch}^2 2 + \operatorname{sh}^2 2} - \sqrt{2} \cdot \operatorname{sh} 2 \right) \right] \cong 97{,}103 \text{ m}^2.$$

23. Să se calculeze momentul de inerție al suprafeței conului $h^2\left(x^2 + y^2\right) = a^2 z^2$ în raport cu axa Oz, pentru $0 < z < h,\ a \in \mathbb{R}_+^*$.

Răspuns. $I_2 = \dfrac{\pi a^3}{2}\sqrt{a^2 + h^2}$.

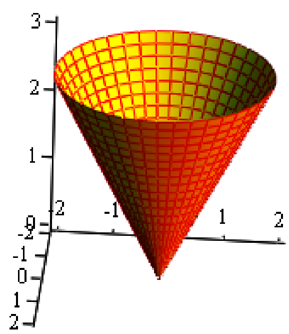


Fig. 8.17

24. Să se calculeze aria suprafeței lui Mobius care are reprezentarea parametrică:

$$\begin{cases} x(u,v)=\left(r+\dfrac{v}{2}\cdot\cos\left(\dfrac{u}{2}\right)\right)\cdot\cos(u), \\ y(u,v)=\left(r+\dfrac{v}{2}\cdot\cos\left(\dfrac{u}{2}\right)\right)\cdot\sin(u), \\ z(u,v)=v\cdot\sin\left(\dfrac{u}{2}\right), \end{cases} \qquad \begin{aligned} &u\in[0,2\cdot\pi]; \\ &v\in[-1,1]. \end{aligned}$$

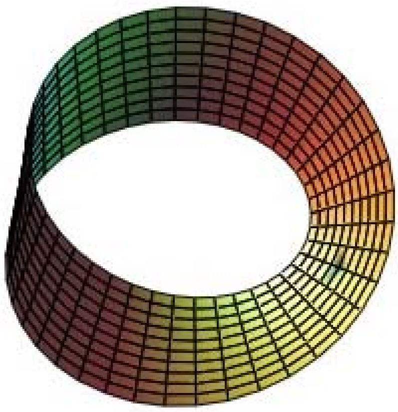


Fig. 8.18

25. Să se determine debitul fluidului ce are viteza

$$\overline{v}=x^2\cdot\overline{i}-y^2\cdot\overline{j}+z^2\cdot\overline{k}$$

prin suprafața domeniului

$$\Omega=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2+y^2+z^2\le 3R^2, 0\le 2\le\sqrt{x^2+y^2-R^2}, 0\le x^2+y^2\le R^2, R>0\right\}$$

în direcția normalei exterioare la suprafață.

Indicație. Domeniul Ω este partea superioară a intersecției dintre o sferă şi un hiperboloid cu o pânză.

Prin urmare, suprafața este mărginită superior de segmentul sferic $x^2+y^2+z^2=3R^2$, lateral de suprafața hiperboloidului cu o pânză $x^2+y^2-z^2=R^2$ şi inferior discului

$$\begin{cases} x^2+y^2\le R^2; \\ z=0. \end{cases}$$

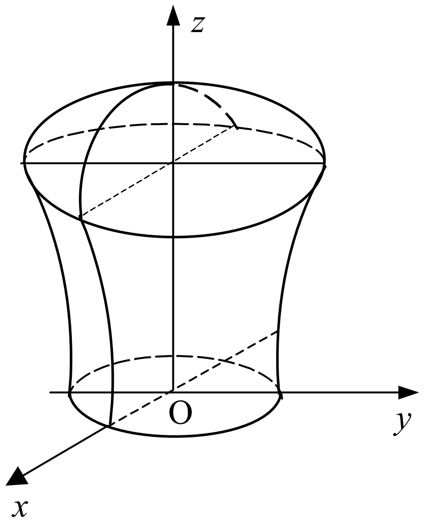


Fig. 8.19

Datorită simetriei

$$Q = \iint_{\partial\Omega} \bar{v} \cdot \bar{n}\, d\sigma = \iint_{\partial\Omega} \left(x^2 \cos\alpha - y^2 \cos\beta + z^2 \cos\gamma \right) d\sigma = \iint_{\partial\Omega} z^2 \cos\gamma d\sigma .$$

Segmentul sferic se proiectează în planul Oxy în discul $x^2 + y^2 \le 2R^2$, porțiunea de hiperboloid se proiectează în planul Oxy în inelul

$$R^2 \le x^2 + y^2 \le 2R^2,$$

iar partea inferioară a suprafeței $\partial\Omega$ este discul $x^2 + y^2 \le R^2$. Pentru segmentul sferic $\cos\gamma < 0$, pentru hiperboloid $\cos\gamma < 0$, iar pentru partea inferioară a suprafeței $\partial\Omega$ avem $z = 0$.

De aceea

$$Q = \iint_{\partial\Omega} z^2 \cos\gamma d\sigma = \iint_{x^2+y^2\le 2R^2} \left(3R^2 - x^2 - y^2 \right) dx dy -$$

$$- \iint_{R^2 \le x^2+y^2 \le 2R^2} \left(x^2 + y^2 - R^2 \right) dx dy = \frac{7}{2}\pi R^4.$$

26. Determinați fluxul termic prin suprafața cilindrului

$$x^2 + y^2 = R^2,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ 0 \le z \le h,\ R > 0$$

în direcția normalei exterioare, cunoscând intensitatea câmpului termic

$$\bar{Q} = 2x \cdot \bar{i} - y \cdot \bar{j} .$$

Răspuns. $\phi = \frac{\pi R^2 h}{4}$.

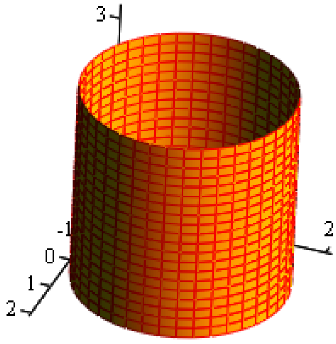


Fig. 8.20

27. *Să se calculeze fluxul magnetic prin suprafața domeniului*

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \middle| \sqrt{x^2 + y^2} \le z \le \sqrt{2R^2 - x^2 - y^2}, 0 \le x^2 + y^2 \le 2R^2 \right\},\ R > 0$$

în direcția normalei exterioare cunoscând intensitatea câmpului magnetic

$$\overline{B} = 2x^2 \cdot \overline{i} + 3y^2 \cdot \overline{j} + z^2 \cdot \overline{k}.$$

Răspuns. $\phi = \pi R^4$.

28. Să se calculeze fluxul electric prin suprafața paraboloidului $z = \frac{h}{R^2}\left(x^2 - y^2\right)$ secționat cu cilindrul $x^2 + y^2 = R^2$, $h > 0$, $R > 0$, în direcția pozitivă a axei Oz, cunoscând intensitatea câmpului electric

$$\overline{E} = x^2 \cdot \overline{i} + y^2 \cdot \overline{j} + z \cdot \overline{k}.$$

Răspuns. $\phi = 0$.

29. Să se determine:

(i) forța de atracție newtoniană cu care un punct arbitrar este atras de un strat sferic omogen $(\rho = \text{const.})$;

(ii) potențialul unui strat sferic omogen într-un punct arbitrar ales.

Indicație. Sfera este $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $R > 0$, iar punctul M se poate alege pe axa Oz.

Răspuns.

(i) $F_z(0,0,a) = \begin{cases} 0, & a \le R; \\ -\frac{4\pi R^2 \rho}{a^2}, & a > R, \end{cases}$

(ii) $P(0,0,a)=\begin{cases}4\pi R\rho, & a<R;\\ \dfrac{4\pi R^2\rho}{a^2}, & a\geq R,\ a>0.\end{cases}$

30. Dacă S este o suprafață închisă cu plan tangent continuu pe porțiuni, având reprezentarea parametrică

$$S\begin{cases}x=x(u,v),\\ y=y(u,v), & (u,v)\in\Delta\subset\mathbb{R}^2,\\ z=z(u,v),\end{cases}$$

să se arate volumul domeniului Ω mărginit de suprafața S este

$$V=\frac{1}{3}\iint_{\Delta}\left\|\begin{matrix}x(u,v) & y(u,v) & z(u,v)\\ x'_u(u,v) & y'_u(u,v) & z'_u(u,v)\\ x'_v(u,v) & y'_v(u,v) & z'_v(u,v)\end{matrix}\right\|\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Aplicație. Să se calculeze volumul următoarelor suprafețe închise:
(i) astroida:

$$\begin{cases}x=\cos^3 u\cos^3 v, & u\in[0,2\pi]\\ y=\sin^3 u\cos^3 v, & v\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]\\ z=\sin^3 v\end{cases}$$

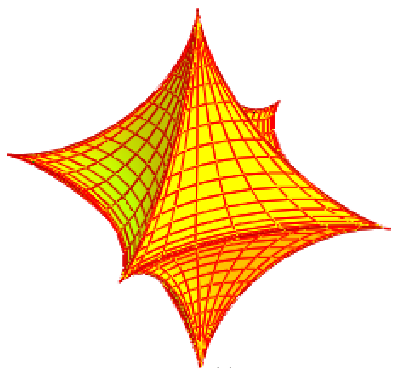


Fig. 8.21

(ii) suprafața Steiner Roman:

$$\begin{cases}x=\sin u\cos u\cos^2 v,\\ y=\sin u\sin v\cos v; & u,v\in[0,\pi]\\ z=\cos u\sin v\cos v,\end{cases}$$

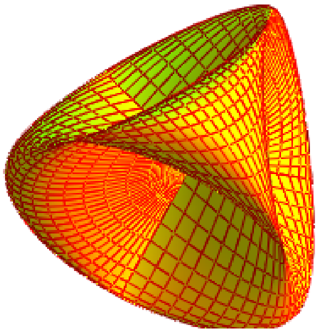


Fig. 8.22

(iii) suprafața „cross-cap”:

$$\begin{cases} x = \sin u \sin v \cos v, & u \in [0, \pi]; \\ y = \sin 2u \cos^2 v, & v \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]; \\ z = \cos 2u \cos^2 v. \end{cases}$$

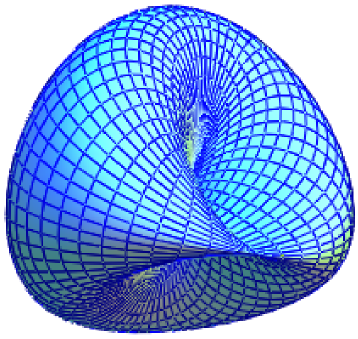


Fig. 8.23

Răspuns. **(i)** $v = \dfrac{4\pi}{35}$;

(ii) $v = \dfrac{1}{6}$;

(iii) $v = \dfrac{\pi}{2}$.

BIBLIOGRAFIE GENERALĂ

1. **D. M. Bătinețu-Giurgiu, M. Bătinețu, V. Gârban**, *Analiză matematică, Exerciții şi probleme*, Editura Militară, Bucureşti, 1992

2. **I. Colojoară**, *Analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983

3. **M. Craiu, V. V. Tănase**, *Analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1980

4. **M. Craiu, M. Roşculeț**, *Culegere de probleme de analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1976

5. **N. Donciu, D. Flondor**, *Algebră şi analiză matematică*. Culegere de probleme, vol. I, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1978

6. **I. P. Elianu**, *Principii de analiză matematică*. Calcul diferențial, Editura Academiei Militare, Bucureşti, 1976

7. **P. Flondor, O. Stănăşilă**, *Lecții de analiză matematică*, Editura ALL, 1993

8. **M. Nicolescu, N. Dinculeanu, S. Marcus**, *Manual de Analiză matematică*, vol. I, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1966

9. **M. Roşculeț**, *Analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1973

10. **M. Roşculeț**, *Culegere de probleme de analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1968

11. **I. Sprințu**, *Elemente de analiză matematică*, Editura Academiei Tehnice Militare, Bucureşti, 2001

12. **O. Stănăşilă**, *Analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981